

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2008/2009	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	--	---

Aufgabenblatt 9

9.1 Charaktertafeln

Erarbeiten Sie sich das Aufstellen von Charaktertafeln anhand des folgenden Auszugs aus Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden der Physik*.

3.10 Konstruktion einer Charaktertafel ◇

Die Charaktertafeln der weitaus meisten Symmetriegruppen, die in der Physik eine Rolle spielen, sind in allgemein zugänglichen Tafeln erfaßt. Sie sind in diesem Buch im Anhang B zu finden. Diese Tafeln stellen demgemäß ein allgemein zur Verfügung stehendes Handwerkszeug dar, so daß der die Gruppentheorie anwendende Wissenschaftler dieselben in den allermeisten Fällen nicht selbst berechnen muß. Trotzdem scheint es angemessen, an dieser Stelle die wesentlichen Hilfsmittel zusammenzustellen, um eine Charaktertafel zu erstellen. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir diese Hilfsmittel bereits kennengelernt. Es sind die folgenden:

1. Die Zahl n_{ID} der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Zahl n_{KI} der Klassen (1. Satz von Burnside):

$$n_{ID} = n_{KI} = n \quad (3.52)$$

Die letztere (n_{KI}) findet man leicht, indem man mittels der Gruppentafel alle zueinander konjugierten Elemente $S = X^{-1}RX$ berechnet.

2. Die Dimensionalitäten d_μ der irreduziblen Darstellungen $\Gamma^{(\mu)}$ werden sodann bestimmt durch die Formel (2. Satz von Burnside)

$$\sum_{\mu=1}^n d_\mu^2 = g = \sum_{K=1}^n g_K \quad (3.53)$$

In den meisten Fällen hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung.

3. Da das Einselement E durch eine Einheitsmatrix dargestellt werden muß, gilt

$$\chi^{(\mu)}(E) = d_\mu \quad (3.54)$$

Dies legt die 1. Spalte der Charaktertafel fest.

4. Da die „Einsdarstellung“ immer als irreduzible Darstellung existiert, ist die 1. Zeile der Charaktertafel immer eine Folge der Zahlen Eins:

$$\chi^{(1)}(K) = 1 \quad (3.55)$$

5. Die Zeilen der Tafel müssen orthogonal und auf g normiert sein mit den Gewichtungsfaktoren g_K (Orthogonalität der Charaktere (3.29)):

$$\sum_{K=1}^n g_K \chi^{(\mu)}(K) \left(\chi^{(\nu)}(K) \right)^* = g \cdot \delta_{\mu\nu} \quad (3.56)$$

6. Die Spalten müssen orthogonale, auf g/g_K normierte Vektoren sein (Vollständigkeit der Charaktere (3.30)):

$$\sum_{\mu=1}^n \chi^{(\mu)}(K) \left(\chi^{(\mu)}(K') \right)^* = \frac{g}{g_K} \cdot \delta_{KK'} \quad (3.57)$$

7. Die Elemente der μ -ten Zeile sind verknüpft durch (3.21)

$$g_i g_j \cdot \chi^{(\mu)}(K_i) \cdot \chi^{(\mu)}(K_j) = d_\mu \cdot \sum_k c_{ijk} \cdot g_k \cdot \chi^{(\mu)}(K_k) \quad (3.58)$$

wobei die Koeffizienten c_{ijk} ganze positive Zahlen (oder Null) sind und durch die Klassenmultiplikation $K_i \times K_j = \sum_k c_{ijk} K_k$ definiert werden (siehe Kapitel 2.8).



Konstruktion der Charaktertafel von C_{3v}

1. Zahl der Klassen:

$$n_{K1} = 3 = n_{ID} = n$$

Es handelt sich dabei um:

$$K_1 = \{E\} \quad (g_{K_1} = 1)$$

$$K_2 = \{C_3, C_3^2\} \quad (g_{K_2} = 2)$$

$$K_3 = \{\sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}\} \quad (g_{K_3} = 3)$$

2. Dimension d_μ der Klassen:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2 = 1, d_3 = 2$$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v^{(1)}$
A_1	1	1	1
A_2	1	x	y
E	2	x'	y'

3. 1. Spalte (Dimension der Darstellung): 1 1 2

4. 1. Zeile (Einsdarstellung): 1 1 1

$$5. \sum_{K=1}^n g_K \chi^{(\mu)}(K) (\chi^{(\nu)}(K))^* = g \cdot \delta_{\mu\nu}$$

Ansatz für 2. Zeile: $1 \ x \ y$

$$\mu = 1, \nu = 2 \rightarrow 1 + 2x + 3y = 0$$

$$\mu = 2, \nu = 2 \rightarrow 1 + 2x^2 + 3y^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = 1, y = -1 \text{ oder } x = -7/5, y = 3/5$$

Ansatz für 3. Zeile: $2 \ x' \ y'$

$$\mu = 1, \nu = 3 \rightarrow 2 + 2x' + 3y' = 0$$

$$\mu = 3, \nu = 3 \rightarrow 4 + 2x'^2 + 3y'^2 = 6$$

$$\Rightarrow x' = -1, y' = 0 \text{ oder } x' = 1/5, y' = -4/5$$

$$6. \sum_{\mu=1}^n \chi^{(\mu)}(K) (\chi^{(\mu)}(K'))^* = \frac{g}{g_K} \cdot \delta_{KK'}$$

2. Spalte: $1 \ x \ x'$

$$K = 1, K' = 2 \rightarrow 1 + x + 2x' = 0$$

$$K = 2, K' = 2 \rightarrow 1 + x^2 + x'^2 = 6/2 = 3$$

$$\Rightarrow x = 1, x' = -1 \text{ oder } x = -7/5, x' = 3/5$$

Damit eindeutige Lösung: $x = 1, y = -1, x' = -1$ und $y' = 0$

Kontrolle mit 3. Spalte: $1 \ y \ y'$

$$K = 1, K' = 3 \rightarrow 1 + y + 2y' = 0$$

$$K = 3, K' = 3 \rightarrow 1 + y^2 + y'^2 = 6/3 = 2$$

$$\Rightarrow y = -1, y' = 0 \text{ oder } x = 0, x' = -1$$

Damit eindeutige Lösung: $x = 1, y = -1, x' = -1$ und $y' = 0$

7. Die Vorschrift (3.21) dient hier nur zur nochmaligen Konsistenzprüfung.