Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Festkörperphysik SS 2008	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 1

1.1 Bänder im Ein-Magnonen-Raum der Sägezahnkette

Wir betrachten ein antiferromagnetisches Spinsystem auf der sogenannten Sägezahn- oder Δ-Kette. Die Struktur der Kette ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Spins an den durch Punkte gekennzeichneten Plätzen sind durch Austauschkopplungen der Stärken J_1 und J_2 verbunden. Die Wechselwirkungsstärken gehen dabei in den folgenden Hamiltonoperator ein

$$\underset{\sim}{H} = -\sum_{u,v} J_{uv} \underset{\sim}{\vec{s}}(u) \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}(v) \tag{1}$$

$$= -\sum_{u,v} J_{uv} \left\{ \underset{\sim}{s}^z(u)\underset{\sim}{s}^z(v) + \frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{s}^+(u)\underset{\sim}{s}^-(v) + \underset{\sim}{s}^-(u)\underset{\sim}{s}^+(v)\right]\right\} \ . \tag{2}$$

Dabei sind $\underset{\sim}{\vec{s}}(u)$ die Spinvektoroperatoren an den Plätzen u. J_{uv} ist die symmetrische Matrix der Austauschkopplungen. Ein negativer Wert bedeutet eine antiferromagnetische Kopplung.

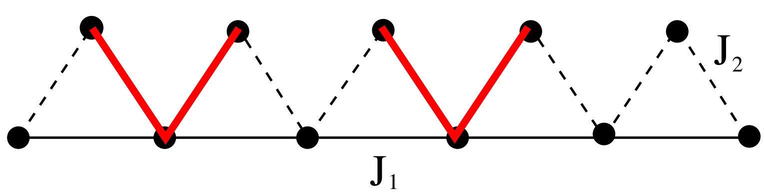

Abbildung 1: Struktur der Sägezahn- oder Δ-Kette: Die Spins sind durch Austauschkopplungen der Stärken J_1 und J_2 verbunden. Was die roten Bereiche bedeuten, lernen Sie aus dem beigelegten Artikel.

Als Basis in dem zugehörigen Hilbertraum kann man die Produktbasis wählen.

$$\underset{\sim}{s}^z(u) \ | \, m_1, \dots, m_u, \dots, m_N \,\rangle = m_u \ | \, m_1, \dots, m_u, \dots, m_N \,\rangle \ . \tag{3}$$

An dieser Gleichung sieht man auch schon, dass „da draussen“ bzw. „im wirklichen Leben“ $\hbar = 1$ gilt!
Im weiteren nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $s = 1/2$ gilt.

a. Zeigen Sie, dass die beiden Varianten des Hamiltonoperators, (1) und (2), gleich sind. Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen den x- und y-Komponenten des Spins und den Auf- und Absteigern.

b. Als Magnon-Vakuum bezeichnet man den voll polarisierten Zustand $|\,\Omega\,\rangle = \;|\,m_1 = 1/2, \dots, m_u = 1/2, \dots, m_N = 1/2\,\rangle$. Dieser ist ein Eigenzustand von $\underset{\sim}{H}$. Warum? Welcher Energieeigenwert gehört für allgemeine J_1 und J_2 dazu, welcher für $J_2 = 2J_1$?
Wenn Sie $m = 1/2$ Null nennen und $m = -1/2$ Eins, dann ist $|\,\Omega\,\rangle = \;|\,0, 0, \dots, 0\,\rangle$.

c. Der Ein-Magnonen-Raum wird durch alle Produktzustände aufgespannt, in denen exakt ein Spin umgeklappt (down) ist. Stellen Sie in diesem Raum die Hamilton-Matrix auf. Die Basiszustände können auch als $|\,0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\,\rangle$ geschrieben werden. Das sollte Ihnen bekannt vorkommen.

d. Das System werde mit periodischen Randbedingungen simuliert. Welche Translationssymmetrie hat das System? Welche k-Werte gibt es? Wieviele Bänder können wir erwarten?

e. Berechnen Sie die Energie-Bänder im Ein-Magnonen-Raum für $J_2 = 2J_1$ und stellen Sie diese graphisch dar. Hier tritt jetzt etwas ungewöhnliches auf – ein sogenanntes flaches Band.

f. Zu den Auswirkungen flacher Bänder lesen Sie bitte den beigelegten Artikel.