

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik III WS 2007/2008	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	---	---

Aufgabenblatt 9

9.1 Gleichverteilungssatz

- Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen statistischen Mechanik?
- Wie lautet die innere Energie des klassischen idealen Gases aus N Punktteilchen in drei Raumdimensionen? Begründen Sie.
- Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N unabhängigen klassischen harmonischen Oszillatoren? Die Kreisfrequenzen für die Schwingungen in die drei Raumdimensionen seien ω_x , ω_y und ω_z ? Begründen Sie das Ergebnis.
- Erläutern Sie, was sich ändert, wenn die Oszillatoren quantenmechanischer Natur sind? Nutzen Sie eine Skizze des funktionalen Verlaufs der Wärmekapazitäten als Funktion der Temperatur.

9.2 Antiferromagnetischer Dimer

Mit dieser Aufgabe möchte ich Ihnen die Möglichkeit geben, an einem übersichtlichen Quantensystem alle wesentlichen Observablen im kanonischen Ensemble zu berechnen. Wir betrachten 2 wechselwirkende quantenmechanische paramagnetische Momente mit Spinquantenzahl s . Die Wechselwirkung werde durch das Heisenberg-Modell beschrieben, d.h.

$$\tilde{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \vec{\tilde{s}}(1) \cdot \vec{\tilde{s}}(2) . \quad (1)$$

Dabei sei $J/k_B = -10$ K die antiferromagnetische Kopplung und $g\mu_B/k_B = 1.3434$ T/K ($T \equiv$ Tesla).

- Wie lauten die Energieeigenwerte des Hamiltonoperators für beliebige Spinquantenzahlen $s_1 = s_2 = s$?
- Wie lauten die Eigenzustände von \tilde{H} im Falle $s_1 = s_2 = 1/2$ dargestellt in der Eigenbasis zu $\tilde{s}_z(1)$ und $\tilde{s}_z(2)$?
- Welche Operatoren vertauschen mit \tilde{H} und untereinander, d. h. bilden einen Satz kommutierender Observabler?

d. Berechnen Sie die Magnetisierung

$$\mathcal{M}(T, B) = \langle\langle -\frac{g\mu_B}{\hbar} \tilde{S}_z \rangle\rangle \quad (2)$$

im homogenen Magnetfeld \vec{B} für den Fall $s_1 = s_2 = 1/2$. Dabei ist \tilde{S}_z die z -Komponente des Gesamtspins. Beachten Sie, daß Sie den Zeeman-Term zum Heisenberg-Hamiltonoperator hinzunehmen müssen.

- e. Stellen Sie $\frac{\mathcal{M}(T, B)}{g\mu_B}$ als Funktion von B für $T = 0$, $T = 1$ K und $T = 10$ K im Bereich von $B = 0, \dots, 50$ T graphisch dar. Hier können Sie endlich mal richtige Einheiten verwenden! Interpretieren Sie das Ergebnis. Stellen Sie zu diesem Zweck die Energieniveaus als Funktion des Magnetfeldes dar.
- f. Berechnen Sie, evtl. mit Mathematica o. ä., die Entropie $S(T, B)$ des Dimers im homogenen Magnetfeld \vec{B} . Stellen Sie einige Isentropen graphisch dar.