

---

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik III WS 2007/2008	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	---	---

---

## Aufgabenblatt 7

### 7.1 Anwendung des Prinzips maximaler Unbestimmtheit auf den nicht isotropen Würfel

Wir betrachten das Würfeln mit einem sechsseitigen Würfel und den üblichen Augenzahlen  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Augenzahlen gewürfelt werden, sollen  $p_i$  genannt werden.

- Berechnen Sie mit dem Prinzip maximaler Unbestimmtheit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der  $p_i$ , wenn Ihnen nichts weiter bekannt ist, als oben angegeben. Wie groß ist die mittlere Augenzahl?
- Im folgenden sei uns eine zusätzliche Information bekannt. Der Würfel ergibt eine bestimmte mittlere Augenzahl  $\langle i \rangle$ . Stellen Sie den zusätzlichen Lagrange-Parameter  $\lambda_1$  als Funktion der mittleren Augenzahl  $\langle i \rangle$  dar. Nutzen Sie dabei, daß Sie die mittlere Augenzahl durch Ableitung des Logarithmus der Zustandssumme nach dem Lagrangeparameter darstellen können, d.h. es ist sinnvoll, erst die Zustandssumme zu ermitteln und sie dann abzuleiten. Das Ergebnis ist die mittlere Augenzahl  $\langle i \rangle$  als Funktion des Lagrange-Parameters  $\lambda_1$ . Leider kann man die Funktion nicht invertieren, aber man kann Sie mit Mathematica darstellen und punktweise invertieren lassen. Stellen Sie die gesuchte Funktion dar.
- Die mittlere Augenzahl betrage im ersten Beispiel 3.5. Wie groß ist der Lagrange-Parameters  $\lambda_1$ ? Interpretieren Sie das Ergebnis.
- Im zweiten Beispiel sei die mittlere Augenzahl  $\langle i \rangle = 2.8$ , d.h. die verschiedenen Augenzahlen kommen offensichtlich nicht gleich oft vor. Bestimmen Sie  $\lambda_1$  sowie die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  (vier Stellen nach dem Komma reichen).
- Was kommt eigentlich für das in der Vorlesung behandelte Beispiel  $\langle i \rangle = 4.5$  raus?

## 7.2 Gaußverteilung

Zeigen Sie, daß man die Gaußverteilung als Lösung aus dem Prinzip maximaler Unbestimmtheit erhält, wenn über eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho(x)$  nichts weiter bekannt ist als der Mittelwert  $x_0$  und die mittlere quadratische Abweichung  $\sigma^2$ . Nutzen Sie die folgenden Definitionen.

Unbestimmtheitsmaß:

$$U = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \ln(L\rho(x)) , \quad (1)$$

dabei ist  $L$  eine (beliebige, aber feste) Länge, die dazu dient, das Argument des Logarithmus dimensionslos zu machen.

Mittelwert:

$$x_0 = \langle x \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(x) . \quad (2)$$

mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma^2 = \langle (x - x_0)^2 \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x_0)^2 \rho(x) . \quad (3)$$

## Zusatzaufgaben zur Wiederholung

### 7.3 Erwartungswerte und Meßwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$|\alpha\rangle = 0.6 |s_z +\rangle + 0.8 |s_z -\rangle \quad (4)$$

präpariert.

- Wie lautet der Erwartungswert des Operators  $\tilde{s}_z$  bezüglich  $|\alpha\rangle$ ? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von  $\tilde{s}_z$  die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?
- Wie lautet der Erwartungswert des Operators  $\tilde{s}_y$  bezüglich  $|\alpha\rangle$ ? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von  $\tilde{s}_y$  die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?
- Konstruieren Sie eine Stern-Gerlach-Apparatur, mit der der Zustand  $|\alpha\rangle$  präpariert werden kann. Begründen Sie.

## 7.4 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in  $z$ -Richtung entlang  $(\theta = 30, \phi = 30)$ , wobei  $\theta$  und  $\phi$  die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h.  $\theta$  mißt die Auslenkung von der positiven  $z$ -Achse und  $\phi$  den Drehwinkel in der  $x-y$ -Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn.

Der Eingangsstrahl sein im Zustand  $|s_z + \rangle$  präpariert.

Welche Eigenwerte mißt der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten?

## 7.5 Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch

In der Vorlesung wurde behauptet, daß der Zustand der aus dem Ofen austretenden Silberatome durch den statistischen Operator

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} ( |s_z + \rangle \langle s_z + | + |s_z - \rangle \langle s_z - | ) \quad (5)$$

beschrieben werden muß.

Man könnte doch auch vermuten, daß der Zustand durch

$$|\phi_{\text{Ofen}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z - \rangle \quad (6)$$

beschrieben wird. Wiederholen Sie die Argumente, warum diese Beschreibung nicht adäquat ist.