| | | |
|---|---|---|
| Universität Bielefeld | Theoretische Physik III | Prof. Dr. Jürgen Schnack |
| Fakultät für Physik | WS 2007/2008 | jschnack@uni-bielefeld.de |
| | Vertretung: | Dr. Hans Behringer |

# Aufgabenblatt 6

## 6.1 Diffusionsgleichung

Die Dichteverteilung $\rho$ auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sei für $t > 0$ durch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = \frac{a}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t), \quad a > 0 \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $\rho(x, t = 0) = f(x)$ bestimmt.

a. Zeigen Sie, dass obiges Anfangswertproblem durch

$$\rho(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi,t) f(\xi) \tag{2}$$

mit der Kernfunktion

$$G(x,\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{2at}\right) \tag{3}$$

gelöst wird.

b. Bestimmen Sie die Lösung von (1) für die Anfangsverteilung

$$f(x) := \frac{A}{\sqrt{2\pi l^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right), \quad l > 0. \tag{4}$$

Wie sieht die Dichteverteilung im (asymptotischen) Grenzfall großer Zeiten $t \gg l^2/a$ aus?

c. Für eine lokalisierte Anfangsverteilung $f$ mit charakteristischer Breite $l$ und Masse $A = \int \mathrm{d}x f(x)$ sollte die Dichteverteilung $\rho$ im Grenzfall großer Zeiten nicht mehr von der ursprünglichen Breite $l$ abhängen. Überlegen Sie sich mittels einer Dimensionsanalyse, dass in diesem Fall die Dichteverteilung von der Form

$$\rho(x,t) = \frac{A}{\sqrt{at}} g(\eta) \tag{5}$$

ist, wobei $\eta := x/\sqrt{at}$. Bestimmen Sie die Funktion $g$ in (5). (*Tipp*: Überzeugen Sie sich, dass $g$ eine gerade Funktion ist.)

## 6.2 Irrlauf auf einem Gitter

Als „mikroskopisches“ Modell für einen Diffusionsprozeß betrachte man einen bei der Position Null startenden Irrlauf auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Wahrscheinlichkeit $q \in ]0, 1[$ für einen Schritt nach rechts und der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ für einen Schritt nach links.

a. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit nach $N$ Schritten an der Position $m$ zu sein, durch die Verteilung

$$W_N(m; q) = \binom{N}{n} q^n (1 - q)^{N-n} =: B_N(n; q) \tag{6}$$

gegeben ist, wobei $n := (N + m)/2$. Die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_N(n; q)$ auf der Menge $\{0, \ldots, N\}$ heißt Bernoulli- oder Binomialverteilung.

b. Berechnen Sie das erste Moment $\mu_N$ und die Varianz $\sigma_N^2$ der Bernoulliverteilung. Bestimmen Sie das relative Schwankungsquadrat $\sigma_N^2/\mu_N^2$ im Grenzfall $N \to \infty$.

c. Diskutieren Sie die ersten beiden Momente der Verteilung $W_N$ des Irrlaufproblems. Betrachten Sie insbesondere den symmetrischen Fall $q = 1/2$.

## 6.3 Fokker-Planck-Gleichung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p$ auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ genüge der Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) p(x, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( b(x) p(x, t) \right) \tag{7}$$

mit zeitunabhängigen Driftkoeffizienten $a$ und Diffusionskoeffizienten $b > 0$. Bestimmen Sie die stationäre Lösung der Differentialgleichung (7).