

|               |                                                    |                                                  |
|---------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| UOS<br>Physik | Theoretische Physik 2<br>Quantenmechanik, stat. TD | Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack<br>jschnack@uos.de |
|---------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|

## Aufgabenblatt 9

### 9.1 Gaußsches Wellenpaket

Gaußsche Wellenpakete spielen für das Verständnis der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie werden außerdem in der Quantenoptik sowie in Näherungsverfahren verwendet. Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle x | \phi \rangle = c \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2a} + i \frac{x p_0}{\hbar} \right\}. \quad (1)$$

$a$ ,  $x_0$  und  $p_0$  sind dabei reell.

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante  $c$ .
- Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls.
- Wie lautet die Impulsdarstellung des Gaußschen Wellenpakets?
- Überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation.
- Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für die freie Bewegung ( $\underline{H} = \underline{T}$ ) und geben Sie die Wellenfunktion für spätere Zeiten an.
- Was erhalten Sie für  $\langle \phi(t) | \underline{x} | \phi(t) \rangle$ ?

### 9.2 Eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung

- Ein eindimensionaler Rechteckpotentialtopf der Tiefe  $U$  habe eine Breite von  $1 \text{ \AA}$ . Innerhalb welcher Schranken für  $U$  (in eV) existieren genau zwei gebundene Zustände für Elektronen? Nehmen Sie zur Vereinfachung bitte an, daß die elektrostatische Abstoßung der Elektronen vernachlässigt werden kann.
- Für den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators berechne man formelmäßig die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich.

### 9.3 Zusatzaufgabe: Vertauschung beschränkter Operatoren

Beweisen Sie, daß beschränkte nichtkommutierende Operatoren nicht zu einer Zahl vertauschen können.

- a. Das typische Beispiel für unbeschränkte Operatoren, die zu einer Zahl vertauschen, sind  $\tilde{x}$  und  $\tilde{p}$ , für die gilt

$$[\tilde{x}, \tilde{p}] = i\hbar. \quad (2)$$

- b. Überlegen Sie sich zuerst, wie Sie beschränkte Operatoren  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  definieren wollen. Verwenden Sie z. B. die Supremumsnorm.
- c. Führen Sie einen indirekten Beweis. Nehmen Sie dazu an, daß  $[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{1}$ .
- d. Beweisen Sie zuerst mit vollständiger Induktion, daß  $\tilde{A}^n \tilde{B} - \tilde{B} \tilde{A}^n = n \tilde{A}^{n-1}$ .
- e. Zeigen Sie, indem Sie  $\|n \tilde{A}^{n-1}\|$  untersuchen, daß  $n \leq 2\|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{B}\|$  im Widerspruch zur Annahme.