UOS Physik	Theoretische Physik 2 Quantenmechanik, stat. TD	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uos.de

Aufgabenblatt 7

7.1 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus dem System von Potenzfunktionen $|\, f_n \,\rangle$ mit $\{\langle\, x \,|\, f_n \,\rangle = x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ läßt sich in $C^0([a, b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \;\;=\;\; \int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x)\, g(x) \tag{1}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.
Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $|\, g_n \,\rangle, n = 0, 1, 2, 3$ sowie ihre Ortsdarstellung.

7.2 Funktionen auf $[a, b]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.
Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle\, x \,|\, u_n \,\rangle \;\;=\;\; u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \quad , \qquad n = 1, 2, \dots \; . \tag{2}$$

a. Skizzieren Sie die ersten drei Funktionen u_1, u_2, u_3.

b. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $|\, u_n \,\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden.

c. Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) \;\;=\;\; \begin{cases} 2\,x & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 2\,(L - x) & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L\;. \end{cases} \tag{3}$$

durch die ersten N Funktionen $|\, u_n \,\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $N = 1$, $N = 5$ und $N = 10$.

d. Es liegt nahe, zu vermuten, daß die Funktionen $|\, u_n \,\rangle$ eine Basis im Vektorraum $C^0([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

7.3 Orts- und Impulsoperatoren

Man betrachte die beliebig oft differenzierbaren Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.
Sind die Operatoren $\underset{\sim}{x}$ und $\underset{\sim}{p}$ hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle\, f \,|\, \underset{\sim}{x} \,|\, g \,\rangle \;\; := \;\; \int_0^L \mathrm{d}x \; f^*(x)\, x\, g(x) \tag{4}$$

und

$$\langle\, f \,|\, \underset{\sim}{p} \,|\, g \,\rangle \;\; := \;\; \int_0^L \mathrm{d}x \; f^*(x)\, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\, x} \;\, g(x) \; . \tag{5}$$