Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack 1. September 2006

Vorname, Name, Matrikelnummer nicht vergessen!

1 Wissen

1.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen (20 P.)

a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

b. Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles? Geben Sie die Spektraldarstellung an. Benennen Sie alle auftretenden Größen (5 P.).

c. Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse (5 P.)?

d. Wie lauten die Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die auftretenden Quantenzahlen im allgemeinen annehmen (5 P.)?

1.2 Gleichverteilungssatz (20 P.)

a. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klasssischen statistischen Mechanik (5 P.)?

b. Wie lautet die innere Energie des klassischen idealen Gases aus N Punktteilchen in drei Raumdimensionen? Begründen Sie (5 P.).

c. Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N unabhängigen klassischen harmonischen Oszillatoren? Die Kreisfrequenzen für die Schwingungen in die drei Raumdimensionen seien ω_x, ω_y und ω_z? Begründen Sie das Ergebnis (5 P.).

d. Erläutern Sie, was sich ändert, wenn die Oszillatoren quantenmechanischer Natur sind? Nutzen Sie eine Skizze des funktionalen Verlaufs der Wärmekapazitäten (5 P.).

1.3 Eigenschaften von Spinoperatoren (30 P.)

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{ \mid s_z +\rangle, \mid s_z -\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; . \tag{1}$$

a. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Wie lauten die Eigenwerte? Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar (10 P.).

b. Da Sie die Darstellungen von $\underset{\sim}{s}_z$ und $\underset{\sim}{s}_x$ kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu $\underset{\sim}{s}_z$) die Darstellung von $\underset{\sim}{s}_y$ aus den Vertauschungsrelationen für Drehimpulse berechnen. Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_y$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ auf (7 P.).

c. Wie lautet die Unbestimmtheitsrelation für zwei Observable $\underset{\sim}{A}$ und $\underset{\sim}{B}$ (3 P.)?

d. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation erfüllt ist, wenn $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{s}_x$ und $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{s}_y$ sowie $|\,\phi\,\rangle = |\,s_z\,+\rangle$ (10 P.).

2 Können

2.1 δ-Potential (30 P.)

Extrem kurzreichweitige Kräfte werden in der Quantenmechanik oft durch ein Potential beschrieben, das in einer Raumdimension die folgende Form

$$V(x) \quad = \quad \alpha\,\delta(x) \tag{2}$$

besitzt. α ist dabei eine reelle Konstante.

a. Leiten Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion bei $x = 0$ her, indem Sie über ein kleines Intervall um Null integrieren und anschließend die Intervallänge gegen Null gehen lassen (10 P.).

b. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ den Transmissions- und den Reflexionskoeffizienten für eine von links einlaufende ebene Welle (10 P.).

c. Bestimmen Sie alle gebundenen Zustände sowie die zugehörigen Energieeigenwerte für $\alpha < 0$ (10 P.).

2.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble (20 P.)

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit $s = 1/2$ im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

a. Stellen Sie die Zustandssumme des kanonischen Ensembles auf (1 P.).

b. Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von k_BT/Δ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$ (7 P.).

c. Gegen welche Werte geht U für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (5 P.)?

d. Wie lauten die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus? Stellen Sie diese als Funktion von k_BT/Δ (schematisch) dar (7 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch (20 P.)

In der Vorlesung wurde behauptet, daß der Zustand der austretenden Silberatome durch den statistischen Operator

$$\underset{\sim}{R} \;=\; \frac{1}{2}\left(\,|\,s_z+\,\rangle\langle\,s_z+\,|\;+\;|\,s_z-\,\rangle\langle\,s_z-\,|\,\right) \tag{3}$$

beschrieben werden muß.
Man könnte doch auch vermuten, daß der Zustand durch

$$|\,\phi_{\text{Ofen}}\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,s_z+\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,s_z-\,\rangle \tag{4}$$

beschrieben wird.

a. Suchen Sie Argumente, warum diese Beschreibung nicht adäquat ist (10 P.).

b. Erläutern Sie, warum der statistische Operator $\underset{\sim}{R}$, der in Gl. (3) definiert ist, den Zustand der austretenden Silberatome adäquat beschreibt (10 P.).

Es können 130 Punkte erreicht werden.

Bewertung nach ECTS

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow$ F
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow$ E
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow$ D
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow$ C
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow$ B
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow$ A

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!