

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack 13. Juli 2006
---	----------------------------------	--

**Vorname, Name, Matrikelnummer nicht vergessen!**

## **1 Wissen**

### **1.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen (20 P.)**

- a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).
- b. Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles? Geben Sie die Spektraldarstellung an. Benennen Sie alle auftretenden Größen (5 P.).
- c. Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse (5 P.)?
- d. Wie lauten die Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die auftretenden Quantenzahlen im allgemeinen annehmen (5 P.)?

### **1.2 Hermitesche Operatoren (15 P.)**

- a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an (5 P.).
- b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind (5 P.).
- c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind (5 P.).

### **1.3 Unbestimmtheitsrelation und Kommutatorrelation(15 P.)**

- a. Geben Sie die Unbestimmtheitsrelation für Ort und Impuls in einer Dimension an und definieren Sie die auftretenden Größen (5 P.).
- b. Interpretieren Sie die Unbestimmtheitsrelation: Was bedeutet diese für Orts- und Impulsmessungen (5 P.)?
- c. Leiten Sie die Kommutatorrelation für Ort und Impuls her; gehen Sie dabei von der Ortsdarstellung von Ort und Impuls aus (5 P.).

## 2 Können

### 2.1 Gaußsches Wellenpaket (40 P.)

Gaußsche Wellenpakete spielen für das Verständnis der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie werden außerdem in der Quantenoptik sowie in Näherungsverfahren verwendet. Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle x | \phi \rangle = c \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2a} + i \frac{x p_0}{\hbar} \right\}. \quad (1)$$

$a$ ,  $x_0$  und  $p_0$  sind dabei reell.

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante  $c$  (10 P.).
- Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls (15 P.).
- Was erhalten Sie für  $\langle \phi(t) | \hat{x} | \phi(t) \rangle$  im Falle freier Bewegung? Gehen Sie dabei von  $d/dt \langle \phi(t) | \hat{x} | \phi(t) \rangle$  aus. Wie hängt  $d/dt \langle \phi(t) | \hat{A} | \phi(t) \rangle$  im allgemeinen mit dem Hamiltonoperator zusammen? Wie lautet der Hamiltonoperator in diesem Fall (15 P.)?

### 2.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble (20 P.)

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit  $s = 1/2$  im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien  $E_1 < E_2$ .

- Stellen Sie die Zustandssumme des kanonischen Ensembles auf (1 P.).
- Berechnen Sie die innere Energie  $U$  und stellen Sie  $U$  als Funktion von  $k_B T / \Delta$  (schematisch) dar. Dabei sei  $\Delta = E_2 - E_1$  (7 P.).
- Gegen welche Werte geht  $U$  für  $T \rightarrow 0$  sowie für  $T \rightarrow \infty$  (5 P.)?
- Wie lauten die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus? Stellen Sie diese als Funktion von  $k_B T / \Delta$  (schematisch) dar (7 P.).

### 3 Weiterdenken

#### 3.1 Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch (20 P.)

In der Vorlesung wurde behauptet, daß der Zustand der austretenden Silberatome durch den statistischen Operator

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} ( |s_z+\rangle\langle s_z+| + |s_z-\rangle\langle s_z-| ) \quad (2)$$

beschrieben werden muß.

Man könnte doch auch vermuten, daß der Zustand durch

$$|\phi_{\text{Ofen}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z-\rangle \quad (3)$$

beschrieben wird.

- Suchen Sie Argumente, warum diese Beschreibung nicht adäquat ist (10 P.).
- Erläutern Sie, warum der statistische Operator  $\tilde{R}$ , der in Gl. (2) definiert ist, den Zustand der austretenden Silberatome adäquat beschreibt (10 P.).

**Es können 130 Punkte erreicht werden.**

## **Bewertung nach ECTS**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow F$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow E$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow D$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow C$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow B$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow A$

## **Noten**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

**Viel Erfolg!**