Universität Osnabrück	Math. Methoden II	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fachbereich Physik	SS 2005	Dipl.-Phys. Matthias Exler

Aufgabenblatt 9

9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{\,|\,s_z\,+\rangle,\ |\,s_z\,-\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert.

a. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_x$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Wie lauten die Eigenwerte? Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar.

c. Stellen Sie die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_z$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_x$ dar.

9.2 Erwartungswerte und Meßwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$|\,\alpha\,\rangle \ = \ 0.6\,|\,s_z\,+\rangle + 0.8\,|\,s_z\,-\rangle \tag{2}$$

präpariert.

a. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_z$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

b. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_y$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_y$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

9.3 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in z-Richtung entlang $(\theta = 30, \phi = 30)$, wobei θ und ϕ die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h. θ mißt die Auslenkung von der positiven z-Achse und ϕ den Drehwinkel in der $x-y$-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn.
Der Eingangsstrahl sein im Zustand $|\, s_z \, + \rangle$ präpariert.
Welche Eigenwerte mißt der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten?

9.4 Pauli-Matrizen

a. Zeigen Sie, daß sich alle hermiteschen (2×2)-Matrizen als Linearkombination der σ-Matrizen (Paulimatrizen) darstellen lassen, wenn man die Einheitsmatrix mit hinzunimmt. Geben Sie zu diesem Zweck die Linearkombination für eine beliebige hermitesche (2×2)-Matrix an.

b. Die hermiteschen (2×2)-Matrizen bilden einen Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, daß

$$\alpha \cdot \beta \quad \equiv \quad (\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \, \mathrm{Sp}\, (\alpha \, \beta) \tag{3}$$

die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt. α und β sind in diesem Beispiel hermitesche (2×2)-Matrizen.

c. Bilden die drei Paulimatrizen zusammen mit der Einheitsmatrix eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarprodukts (3)?

d. Leiten Sie jetzt die Entwicklungskoeffizienten für eine beliebige hermitesche (2×2)-Matrix durch Bildung des Skalarprodukts ab.