Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Math. Methoden II SS 2005	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Matthias Exler

Aufgabenblatt 7

7.1 Zweiniveausystem

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit $s = 1/2$ im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

a. Stellen Sie die Zustandssumme auf.

b. Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U/Δ als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$.

c. Gegen welche Werte geht U für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$.

d. Berechnen Sie die Wärmekapazität C und stellen Sie C/k_B als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar.

e. Gegen welche Werte geht C für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$.

f. Stellen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar.

g. In einem Zweiniveausystem kann eine sogenannte Besetzungsinversion auftreten, die man formal durch eine negative Temperatur charakterisieren kann. Wie groß ist $k_B T/\Delta$, wenn die Besetzungszahl des oberen Niveaus 0.8 und die des unteren 0.2 ist?

7.2 Gleichverteilungssatz

In der klassischen Statistischen Physik wird das kanonische Ensemble durch die folgende Zustandssumme beschrieben:

$$Z(T) \;=\; \int \mathrm{d}^3x_1 \cdots \mathrm{d}^3x_N \; \mathrm{d}^3p_1 \cdots \mathrm{d}^3p_N \;\; \exp\left\{ -\frac{H(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N)}{k_B T} \right\} \; . \qquad (1)$$

Dabei ist $H(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N)$ die Hamiltonfunktion des klassischen Systems.

a. Sei jetzt $H(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N) = T(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N) + V(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)$, d.h. die Hamiltonfunktion zerfalle in die kinetische Energie, die wie gewohnt von den Impulsen abhängt und die potentielle Energie, die nur von den Orten abhängt. Wie lauten die thermischen Mittelwerte von $p_{j,y}^2$ (y-Komponente des Impulses von Teilchen j) sowie von $\vec{p}_j^{\,2}$?

b. Sei jetzt V das Potential eines äußeren harmonischen Oszillators, d.h.

$$V(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \omega^2 \vec{x}_i^{\,2} \; . \qquad (2)$$

Wie lauten die thermischen Mittelwerte von y_j^2 (y-Komponente des Ortes von Teilchen j) sowie von $\vec{x}_j^{\,2}$?

Hinweis: Der thermische Mittelwert einer klassischen Observablen $A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N)$ wird wie folgt berechnet:

$$\langle\langle\, A \,\rangle\rangle \;=\; \frac{1}{Z(T)} \int \mathrm{d}^3x_1 \cdots \mathrm{d}^3x_N \; \mathrm{d}^3p_1 \cdots \mathrm{d}^3p_N \; A(\vec{x};\vec{p}) \;\; \exp\left\{ -\frac{H(\vec{x};\vec{p})}{k_B T} \right\} \; , \qquad (3)$$

wobei $A(\vec{x};\vec{p})$ und $H(\vec{x};\vec{p})$ Kurzscheibweisen sind.