Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Math. Methoden II SS 2005	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Matthias Exler

Aufgabenblatt 5

5.1 Kastenpotential

Vorwort: In der Quantenmechanik werden die Zustände eines Systems durch Vektoren eines Hilbertraumes beschrieben. Die physikalischen Observablen, also z.B. Ort, Impuls, kinetische und potentialle Energie, werden durch hermitesche Operatoren beschrieben. Führt man eine Messung durch, so treten als Messwerte nur die Eigenwerte der gemessenen Observablen auf.
Die Zeitentwicklung eines Systems, d.h. des Zustandes $|\,\Psi\,\rangle$ wird durch die zeitabhängige Schrödingergleichung beschrieben

$$i\hbar\frac{d}{dt}\;|\,\Psi(t)\,\rangle \;=\; \underset{\sim}{H}\,|\,\Psi(t)\,\rangle\;. \tag{1}$$

Dabei ist $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{V}$ der Hamiltonoperator, der sich als Summe aus den Operatoren der kinetischen und der potentiellen Energie ergibt.
Problem: Wir betrachten im folgenden das physikalische Problem eines Teilchens, das zwischen zwei ideal reflektierenden Wänden eingesperrt ist. Man sagt, das Teilchen befindet sich in einem unendlich hohen Kastenpotential. Zwischen den Wänden im Intervall $[0, L]$ kann sich das Teilchen frei bewegen. Man beschreibt das System, indem man nur die Bewegung im Kasten mit $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T}$ betrachtet und den Einfluß der unendlich hohen Potentialwände durch die Randbedingung $\langle\,0\,|\,\Psi(t)\,\rangle = \langle\,L\,|\,\Psi(t)\,\rangle = 0$ modelliert.
Aufgabenstellung: Beschreiben Sie die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\,\Psi\,\rangle$. Bestimmen Sie dazu zuerst die Eigenzustände und Eigenwerte des Hamiltonoperators

$$\underset{\sim}{H}\,|\,\phi_n\,\rangle \;=\; \underset{\sim}{T}\,|\,\phi_n\,\rangle = \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m}\,|\,\phi_n\,\rangle = E_n\,|\,\phi_n\,\rangle\;. \tag{2}$$

Die Eigenzustände $|\,\phi_n\,\rangle$ bilden eine Basis. Entwickeln Sie den Zustand $|\,\Psi\,\rangle$ bezüglich dieser Basis. Setzen Sie diese Darstellung in Gleichung (1) ein und integrieren Sie bezüglich der Zeit. Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\,\Psi(t)\,\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\,\Psi(0)\,\rangle$ befunden hat?
Numerisches Beispiel: Nehmen Sie an, dass das System zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$\langle\,x\,|\,\Psi(0)\,\rangle \;=\; \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}\,L}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L\;. \end{cases} \tag{3}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die ersten 20 Komponenten von $|\,\Psi(0)\,\rangle$ bezüglich der Basis $\{\,|\,\phi_n\,\rangle\}$ mit Mathematica und stellen Sie die Zeitentwicklung des Realteils, des Imaginärteils und des Betrags dar.