Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Math. Methoden II SS 2005	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Matthias Exler

Aufgabenblatt 4

4.1 Hermitesche Operatoren

Man betrachte die beliebig oft differenzierbaren Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.
Sind die Operatoren $\underset{\sim}{x}$ und $\underset{\sim}{p}$ hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle\, f \,|\, \underset{\sim}{x} \,|\, g \,\rangle \;\; := \;\; \int_0^L \mathrm{d}x \; f^*(x)\, x\, g(x) \tag{1}$$

und

$$\langle\, f \,|\, \underset{\sim}{p} \,|\, g \,\rangle \;\; := \;\; \int_0^L \mathrm{d}x \; f^*(x)\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\, x} \;\; g(x) \; . \tag{2}$$

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren der kinetischen Energie

Man betrachte die quadratintegrablen (und beliebig oft differenzierbaren) Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.
Der Operator der kinetischen Energie ist definiert durch die folgenden Matrixelemente

$$\langle\, f \,|\, \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} \,|\, g \,\rangle \;\; := \;\; \int_0^L \mathrm{d}x \; f^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x^2} \right) g(x) \; . \tag{3}$$

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der kinetischen Energie an, d.h. lösen Sie

$$\langle\, x \,|\, \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} \,|\, f_n \,\rangle \;\; := \;\; \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x^2} \right) f_n(x) = t_n\, f_n(x) \tag{4}$$

unter Beachtung der Randbedingung $f(0) = f(L) = 0$.