Universität Osnabrück	Math. Methoden II	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fachbereich Physik	SS 2005	Dipl.-Phys. Matthias Exler

Aufgabenblatt 3

3.1 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus dem System von Potenzen $\{x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ läßt sich in $C^0([a, b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x\; f^*(x)\, g(x) \tag{1}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.
Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $\,|\, g_n \,\rangle, n = 0, 1, 2, 3$.

3.2 Funktionen auf $[a, b]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.
Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle\, x \,|\, u_n \,\rangle \;=\; u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \sin\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \quad , \qquad n = 1, 2, \dots \;. \tag{2}$$

a. Skizzieren Sie die ersten drei Funktionen u_1, u_2, u_3.

b. Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\,|\, u_n \,\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden.

c. Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2\,x & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 2\,(L - x) & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L \;. \end{cases} \tag{3}$$

durch die ersten N Funktionen $\langle\, x \,|\, u_n \,\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $N = 1$, $N = 5$ und $N = 10$.

d. Es liegt nahe, zu vermuten, daß die Funktionen $\,|\, u_n \,\rangle$ eine Basis im Vektorraum $C^0([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$ bilden. Wie könnte man das beweisen?