Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Math. Methoden II Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack 24. November 2005

Name, Vorname, Matrikelnummer:

1 Wissen

1.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen (20 P.)

a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

b. Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles bzw. die kanonische Gesamtheit? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

c. Wie lautet die Spektraldarstellung des statistischen Operators im kanonischen Ensemble? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

d. Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse? Geben Sie ein Beispiel für einen vollständigen Satz von **kommutierenden** Drehimpulsoperatoren an (5 P.).

1.2 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (20 P.)

Aus dem System von Potenzen $\{x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ läßt sich in $C^0([a, b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x)\, g(x) \tag{1}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.

a. Erklären Sie kurz, wie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren funktioniert (10 P.).

b. Bestimmen Sie die ersten vier **orthonormalen** Polynome $|\, g_n \,\rangle, n = 0, 1, 2, 3$ (10 P.).

2 Können

2.1 Gleichverteilungssatz (25 P.)

In der klassischen Statistischen Physik wird das kanonische Ensemble durch die folgende Zustandssumme beschrieben:

$$Z(T) \;=\; \int \mathrm{d}^3x_1 \cdots \mathrm{d}^3x_N \; \mathrm{d}^3p_1 \cdots \mathrm{d}^3p_N \;\exp\left\{ -\frac{H(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N)}{k_BT} \right\} \; . \tag{2}$$

Dabei ist $H(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N)$ die Hamiltonfunktion des klassischen Systems. Sei jetzt $H(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N) = T(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N) + V(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N)$, d.h. die Hamiltonfunktion zerfalle in die kinetische Energie, die wie gewohnt von den Impulsen abhängt und die potentielle Energie, die nur von den Orten abhänge.

a. Wie lauten die thermischen Mittelwerte von $p_{j,y}^2/(2m_j)$ (y-Komponente des Impulses von Teilchen j) sowie von $\vec{p}_j^{\,2}/(2m_j)$ (10 P.)?

b. Sei jetzt V das Potential eines äußeren harmonischen Oszillators, d.h.

$$V(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\omega^2\vec{x}_i^{\,2} \; . \tag{3}$$

Wie lauten die thermischen Mittelwerte von $\frac{1}{2}\, m_j\omega^2 y_j^2$ (y-Komponente des Ortes von Teilchen j) sowie von $\frac{1}{2}\, m_j\omega^2\vec{x}_j^{\,2}$ (10 P.)?

c. Die erzielten Ergebnisse sind als ein wichtiger Satz der Thermodynamik bekannt. Wie heißt dieser und wie lautet sein Inhalt (5 P.)?

Hinweis: Der thermische Mittelwert einer klassischen Observablen $A(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N;\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N)$ wird wie folgt berechnet:

$$\langle\langle\, A \,\rangle\rangle \;=\; \frac{1}{Z(T)} \int \mathrm{d}^3x_1 \cdots \mathrm{d}^3x_N \; \mathrm{d}^3p_1 \cdots \mathrm{d}^3p_N \; A(\vec{x};\vec{p}) \;\exp\left\{ -\frac{H(\vec{x};\vec{p})}{k_BT} \right\} \; , \tag{4}$$

wobei $A(\vec{x};\vec{p})$ und $H(\vec{x};\vec{p})$ Kurzscheibweisen sind.

2.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble (25 P.)

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit $s = 1/2$ im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

a. Stellen Sie die Zustandssumme auf (2 P.).

b. Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von k_BT/Δ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$ (5 P.).

c. Gegen welche Werte geht U für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (4 P.).

d. Berechnen Sie die Wärmekapazität C und stellen Sie C/k_B als Funktion von k_BT/Δ (schematisch) dar (5 P.).

e. Gegen welche Werte geht C für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (4 P.).

f. Wie lauten die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus? Stellen Sie diese als Funktion von k_BT/Δ (schematisch) dar (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Eigenwerte und Eigenvektoren der kinetischen Energie (20 P.)

Man betrachte die quadratintegrablen (und beliebig oft differenzierbaren) Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$. Der Operator der kinetischen Energie ist definiert durch die folgenden Matrixelemente

$$\langle f \,|\, \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} \,|\, g \rangle \;:=\; \int_0^L \mathrm{d}x\; f^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g(x)\;. \tag{5}$$

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der kinetischen Energie an, d.h. lösen Sie

$$\langle x \,|\, \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} \,|\, f_n \rangle \;:=\; \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_n(x) = t_n\, f_n(x) \tag{6}$$

unter Beachtung der Randbedingung $f(0) = f(L) = 0$.

3.2 Spin $s = 1$ (20 P.)

Leiten Sie für einen Spin $s = 1$ die Darstellungen der drei Spinkomponenten $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y, \underset{\sim}{s}_z$ in der Eigenbasis von $\underset{\sim}{s}_z$ her. Verwenden Sie dabei

a. die Eigenwertgleichungen für den Spin,

b. den Zusammenhang zwischen $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}^+, \underset{\sim}{s}^-$,

c. sowie

$$\underset{\sim}{s}^\pm \,|\, s\; m \rangle \;=\; \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} \,|\, s\; m \pm 1 \rangle\;. \tag{7}$$

Es können 130 Punkte erreicht werden.

Bewertung nach ECTS

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow \text{F}$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow \text{E}$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow \text{D}$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow \text{C}$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow \text{B}$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow \text{A}$

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!