

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Math. Methoden II Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack 09. September 2005
---	------------------------------	---

**Name, Vorname, Matrikelnummer:**

# 1 Wissen

## 1.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen (20 P.)

- Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).
- Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles bzw. die kanonische Gesamtheit? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).
- Wie lautet die Spektraldarstellung des statistischen Operators im kanonischen Ensemble? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).
- Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse? Geben Sie ein Beispiel für einen vollständigen Satz von **kommutierenden** Drehimpulsoperatoren an (5 P.).

## 1.2 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (20 P.)

Aus dem System von Potenzen  $\{x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$  läßt sich in  $C^0([a, b], \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b dx f^*(x) g(x) \quad (1)$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien  $a = -1$  und  $b = 1$ .

- Erklären Sie kurz, wie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren funktioniert (10 P.).
- Bestimmen Sie die ersten vier **orthonormalen** Polynome  $|g_n\rangle, n = 0, 1, 2, 3$  (10 P.).

## 2 Können

### 2.1 Gleichverteilungssatz (25 P.)

In der klassischen Statistischen Physik wird das kanonische Ensemble durch die folgende Zustandssumme beschrieben:

$$Z(T) = \int d^3x_1 \cdots d^3x_N d^3p_1 \cdots d^3p_N \exp \left\{ -\frac{H(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)}{k_B T} \right\} . \quad (2)$$

Dabei ist  $H(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  die Hamiltonfunktion des klassischen Systems. Sei jetzt  $H(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = T(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ , d.h. die Hamiltonfunktion zerfalle in die kinetische Energie, die wie gewohnt von den Impulsen abhängt und die potentielle Energie, die nur von den Orten abhängt.

- Wie lauten die thermischen Mittelwerte von  $p_{j,y}^2/(2m_j)$  ( $y$ -Komponente des Impulses von Teilchen  $j$ ) sowie von  $\vec{p}_j^2/(2m_j)$  (10 P.)?
- Sei jetzt  $V$  das Potential eines äußeren harmonischen Oszillators, d.h.

$$V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \omega^2 \vec{x}_i^2 . \quad (3)$$

Wie lauten die thermischen Mittelwerte von  $\frac{1}{2} m_j \omega^2 y_j^2$  ( $y$ -Komponente des Ortes von Teilchen  $j$ ) sowie von  $\frac{1}{2} m_j \omega^2 \vec{x}_j^2$  (10 P.)?

- Die erzielten Ergebnisse sind als ein wichtiger Satz der Thermodynamik bekannt. Wie heißt dieser und wie lautet sein Inhalt (5 P.)?

**Hinweis:** Der thermische Mittelwert einer klassischen Observablen  $A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  wird wie folgt berechnet:

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \frac{1}{Z(T)} \int d^3x_1 \cdots d^3x_N d^3p_1 \cdots d^3p_N A(\vec{x}; \vec{p}) \exp \left\{ -\frac{H(\vec{x}; \vec{p})}{k_B T} \right\} , \quad (4)$$

wobei  $A(\vec{x}; \vec{p})$  und  $H(\vec{x}; \vec{p})$  Kurzschreibweisen sind.

### 2.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble (25 P.)

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit  $s = 1/2$  im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien  $E_1 < E_2$ .

- Stellen Sie die Zustandssumme auf (2 P.).
- Berechnen Sie die innere Energie  $U$  und stellen Sie  $U$  als Funktion von  $k_B T/\Delta$  (schematisch) dar. Dabei sei  $\Delta = E_2 - E_1$  (5 P.).
- Gegen welche Werte geht  $U$  für  $T \rightarrow 0$  sowie für  $T \rightarrow \infty$  (4 P.).
- Berechnen Sie die Wärmekapazität  $C$  und stellen Sie  $C/k_B$  als Funktion von  $k_B T/\Delta$  (schematisch) dar (5 P.).
- Gegen welche Werte geht  $C$  für  $T \rightarrow 0$  sowie für  $T \rightarrow \infty$  (4 P.).
- Wie lauten die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus? Stellen Sie diese als Funktion von  $k_B T/\Delta$  (schematisch) dar (5 P.).

### 3 Weiterdenken

#### 3.1 Pauli-Matrizen (20 P.)

Die Paulimatrizen lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- a. Zeigen Sie, daß sich alle hermiteschen  $(2 \times 2)$ -Matrizen als Linearkombination der  $\sigma$ -Matrizen (Paulimatrizen) darstellen lassen, wenn man die Einheitsmatrix mit hinzunimmt. Geben Sie zu diesem Zweck die Linearkombination für eine beliebige hermitesche  $(2 \times 2)$ -Matrix an (10 P.).
- b. Die hermiteschen  $(2 \times 2)$ -Matrizen bilden einen Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, daß

$$\alpha \cdot \beta \equiv (\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\alpha \beta) \quad (6)$$

die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt.  $\alpha$  und  $\beta$  sind in diesem Beispiel hermitesche  $(2 \times 2)$ -Matrizen (10 P.).

#### 3.2 Fouriertransformation einer Ableitung (20 P.)

$f$  sei eine Funktion der reellen Variablen  $x$ , die im Unendlichen verschwindet. Zeigen Sie, daß die Fouriertransformation der Ableitung von  $f$  nach  $x$  gerade dem Produkt der Fouriertransformierten von  $f$  mit  $ik$  entspricht.

**Es können 130 Punkte erreicht werden.**

## **Bewertung nach ECTS**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow \text{F}$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow \text{E}$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow \text{D}$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow \text{C}$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow \text{B}$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow \text{A}$

## **Noten**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

**Viel Erfolg!**