Universität Osnabrück	Math. Methoden II	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fachbereich Physik	Klausur, Freischuß	07. Juli 2005

Name, Vorname, Matrikelnummer:

1 Wissen

1.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen (20 P.)

a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an und benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

b. Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles bzw. die kanonische Gesamtheit? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

c. Wie lautet die Spektraldarstellung des statistischen Operators im kanonischen Ensemble? Benennen Sie die auftretenden Größen (5 P.).

d. Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse? Geben Sie ein Beispiel für einen vollständigen Satz von Drehimpulsoperatoren an (5 P.).

1.2 Hermitesche Operatoren (15 P.)

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an (5 P.).

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind (5 P.).

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind (5 P.).

2 Können

2.1 Gaußsches Wellenpaket (30 P.)

Gaußsche Wellenpakete spielen für das Verständnis der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie werden außerdem in der Quantenoptik sowie in Näherungsverfahren verwendet. Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle\, x \,|\, \phi \,\rangle \;=\; c \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2a} + i\frac{x p_0}{\hbar} \right\} \;. \tag{1}$$

a, x_0 und p_0 sind dabei reell.

a. Bestimmen Sie die Normierungskonstante c (10 P.).

b. Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls (20 P.).

2.2 Legendre-Transformation (20 P.)

a. Wie lautet die Legendre-Transformierte $g(p)$ von

$$f(x) \;=\; x^4 \;, \quad \text{mit } x \geq 0 \text{ (10 P.)?} \tag{2}$$

b. Warum existiert keine Legendre-Transformierte zu

$$f(x) \;=\; x^3 \;, \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ (10 P.)?} \tag{3}$$

3 Weiterdenken

3.1 Pauli-Matrizen (20 P.)

Die Paulimatrizen lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;. \tag{4}$$

a. Zeigen Sie, daß sich alle hermiteschen (2×2)-Matrizen als Linearkombination der σ-Matrizen (Paulimatrizen) darstellen lassen, wenn man die Einheitsmatrix mit hinzunimmt. Geben Sie zu diesem Zweck die Linearkombination für eine beliebige hermitesche (2×2)-Matrix an (10 P.).

b. Die hermiteschen (2×2)-Matrizen bilden einen Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, daß

$$\alpha \cdot \beta \;\equiv\; (\alpha, \beta) := \frac{1}{2}\; \mathrm{Sp}\,(\alpha\, \beta) \tag{5}$$

die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt. α und β sind in diesem Beispiel hermitesche (2×2)-Matrizen (10 P.).

3.2 Fouriertransformation einer Ableitung (25 P.)

f sei eine Funktion der rellen Variablen x, die im Unendlichen verschwindet. Zeigen Sie, daß die Fouriertransformation der Ableitung von f nach x gerade dem Produkt der Fouriertransformierten von f mit ik entspricht.

Es können 130 Punkte erreicht werden.

Bewertung nach ECTS

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow \text{F}$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow \text{E}$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow \text{D}$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow \text{C}$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow \text{B}$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow \text{A}$

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!