

Aufgabenblatt 10

10.1 Laplace-Operator

Zeigen Sie, daß die folgenden Ausdrücke für den Radialteil des Laplace-Operators äquivalent sind

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} . \quad (1)$$

10.2 Kleine Übungsaufgabe zu Ableitungstransformationen

Es sei $z = \cos(\vartheta)$. Zeigen Sie, daß

$$\sin(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} = (z^2 - 1) \frac{d}{dz} . \quad (2)$$

10.3 Starrer Rotator

Ein starres Hantelmolekül rotiere im Raum um den Koordinatenursprung mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln ϑ und ϕ . Es werde durch den Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\Theta} \tilde{L}^2 \quad (3)$$

beschrieben. Θ sei das Trägheitsmoment.

- Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und eventuelle Entartungsgrade.
- Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinde sich der Rotator im Zustand

$$\psi(\vartheta, \phi) = \alpha (\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cos(2\phi)) . \quad (4)$$

Dabei ist α die Normierungskonstante. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung von \tilde{L}^2 die Werte $6\hbar^2, 2\hbar^2, 0$?

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die gleichzeitige Messung von \tilde{L}^2 und L_z das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$?