

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 QM, stat. TD	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Felix Homann
---	---------------------------------------	---

## Aufgabenblatt 7

### 7.1 Hamiltonoperator und Teilchenzahloperator in zweiter Quantisierung

In zweiter Quantisierung kann der Hamiltonoperator für ideale Quantengase wie folgt dargestellt werden

$$\tilde{H} = \sum_k \varepsilon_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k . \quad (1)$$

$\varepsilon_k$  sind die zum Einteilcheneigenzustand  $|k\rangle$  gehörigen Einteilchenenergieeigenwerte. Der Teilchenzahloperator lautet dann

$$\tilde{N} = \sum_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k . \quad (2)$$

Die Operatoren  $\tilde{a}_k^\dagger$  und  $\tilde{a}_k$  seien die Erzeuger und Vernichter eines Fermions im Einteilchenzustand  $|k\rangle$ . Die Ausdrücke gelten für Bosonen entsprechend, die zugehörigen Operatoren können z. B. mit  $\tilde{b}_k^\dagger$  und  $\tilde{b}_k$  bezeichnet werden.

Zeigen Sie, daß  $\tilde{H}$  und  $\tilde{N}$  vertauschen. Nutzen Sie dazu die Kommutatorrelationen für  $\tilde{a}_k^\dagger$  und  $\tilde{a}_k$  bzw.  $\tilde{b}_k^\dagger$  und  $\tilde{b}_k$  aus der Vorlesung.

### 7.2 Zwei identische Teilchen im Kastenpotential

Zwei identische Teilchen befinden sich in einem eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialwänden

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3)$$

- Wie lauten die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen (Ortsdarstellung) für ein Teilchen im Kastenpotential?
- Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Zweiteilchensystems. Warum separieren die Eigenfunktionen in einen Orts- und einen Spinanteil?
- Bei den beiden Teilchen handele es sich um Fermionen mit Spin  $s = 1/2$ . Welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch  $S = 1$  beschrieben wird und welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch  $S = 0$  beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.
- Bei den beiden Teilchen handele es sich um Bosonen mit Spin  $s = 1$ . Welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch  $S = 2, M = 2$  beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.