

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 QM, stat. TD	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Felix Homann
---	---------------------------------------	---

Aufgabenblatt 7

7.1 Hamiltonoperator und Teilchenzahloperator in zweiter Quantisierung

In zweiter Quantisierung kann der Hamiltonoperator für ideale Quantengase wie folgt dargestellt werden

$$\tilde{H} = \sum_k \varepsilon_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k . \quad (1)$$

ε_k sind die zum Einteilcheneigenzustand $|k\rangle$ gehörigen Einteilchenenergieeigenwerte. Der Teilchenzahloperator lautet dann

$$\tilde{N} = \sum_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k . \quad (2)$$

Die Operatoren \tilde{a}_k^\dagger und \tilde{a}_k seien die Erzeuger und Vernichter eines Fermions im Einteilchenzustand $|k\rangle$. Die Ausdrücke gelten für Bosonen entsprechend, die zugehörigen Operatoren können z. B. mit \tilde{b}_k^\dagger und \tilde{b}_k bezeichnet werden.

Zeigen Sie, daß \tilde{H} und \tilde{N} vertauschen. Nutzen Sie dazu die Kommutatorrelationen für \tilde{a}_k^\dagger und \tilde{a}_k bzw. \tilde{b}_k^\dagger und \tilde{b}_k aus der Vorlesung.

7.2 Zwei identische Teilchen im Kastenpotential

Zwei identische Teilchen befinden sich in einem eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialwänden

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3)$$

- Wie lauten die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen (Ortsdarstellung) für ein Teilchen im Kastenpotential?
- Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Zweiteilchensystems. Warum separieren die Eigenfunktionen in einen Orts- und einen Spinanteil?
- Bei den beiden Teilchen handele es sich um Fermionen mit Spin $s = 1/2$. Welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 1$ beschrieben wird und welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 0$ beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.
- Bei den beiden Teilchen handele es sich um Bosonen mit Spin $s = 1$. Welche Symmetrie muß der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 2, M = 2$ beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.