

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 QM, stat. TD	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Felix Homann
---	---------------------------------------	---

Aufgabenblatt 5

5.1 Spindimer

Wir betrachten 2 wechselwirkende quantenmechanische paramagnetische Momente mit Spinquantenzahl s . Die Wechselwirkung werde durch das Heisenberg-Modell beschrieben, d.h.

$$\tilde{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \vec{s}(1) \cdot \vec{s}(2) . \quad (1)$$

Dabei sei $J/k = -10$ K die antiferromagnetische Kopplung und $g\mu_B/k = 1.3434$ Tesla/K.

- Wie lauten die Energieeigenwerte des Hamiltonoperators für beliebige Spinquantenzahlen $s_1 = s_2 = s$?
- Wie lauten die Eigenzustände von \tilde{H} im Falle $s_1 = s_2 = 1/2$?
- Welche Operatoren vertauschen mit \tilde{H} und untereinander, d. h. bilden einen Satz kommutierender Observabler?
- Berechnen Sie die Magnetisierung

$$\mathcal{M}(T, B) = \langle \langle -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathcal{S}_z \rangle \rangle . \quad (2)$$

im homogenen Magnetfeld \vec{B} für den Fall $s_1 = s_2 = 1/2$. Dabei ist \mathcal{S}_z die z -Komponente des Gesamtspins. Beachten Sie, daß Sie den Zeeman-Term zum Heisenberg-Hamiltonoperator hinzunehmen müssen.

- Stellen Sie $\frac{\mathcal{M}(T, B)}{g\mu_B}$ als Funktion von B für $T = 0$, $T = 1$ K und $T = 10$ K im Bereich von $B = 0, \dots, 50$ Tesla graphisch dar. Hier können Sie endlich mal richtige Einheiten verwenden! Interpretieren Sie das Ergebnis. Stellen Sie zu diesem Zweck die Energieniveaus als Funktion des Magnetfeldes dar.
- Berechnen Sie, evtl. mit Mathematica o. ä., die Entropie $S(T, B)$ des Dimers im homogenen Magnetfeld \vec{B} . Stellen Sie einige Isentropen graphisch dar.

5.2 Spinkopplung

- Es sollen drei Spins $s = 2$ gekoppelt werden. Welche Gesamtspins kann ich erreichen und wie oft treten diese auf (Entartung)?
- Zwei Spins $s = 1$ sollen gekoppelt werden. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Zustände mit Gesamtspin $S = 2$.
- Zusatzaufgabe:** Berechnen Sie die restlichen Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

5.3 Spindreieck

Wir betrachten 3 wechselwirkende Spins mit Spinquantenzahl s . Die Wechselwirkung werde durch das Heisenberg-Modell beschrieben, d.h.

$$\underline{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \left(\underline{\tilde{s}}(1) \cdot \underline{\tilde{s}}(2) + \underline{\tilde{s}}(2) \cdot \underline{\tilde{s}}(3) + \underline{\tilde{s}}(3) \cdot \underline{\tilde{s}}(1) \right) . \quad (3)$$

Dabei sei $J/k = -10$ K die antiferromagnetische Kopplung und $g\mu_B/k = 1.3434$ Tesla/K.

- Wie lauten die Energieeigenwerte des Hamiltonoperators für beliebige Spinquantenzahlen $s_1 = s_2 = s_3 = s$?
- Zusatzaufgabe:** Wie lauten die Eigenzustände von \underline{H} im Falle $s_1 = s_2 = s_3 = 1/2$? Beschreiben Sie, wie Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.
- Berechnen Sie die Magnetisierung

$$\mathcal{M} = \langle\langle -\frac{g\mu_B}{\hbar} \underline{\tilde{S}}_z \rangle\rangle . \quad (4)$$

für den Fall $s_1 = s_2 = s_3 = 1/2$. Dabei ist $\underline{\tilde{S}}_z$ die z -Komponente des Gesamtspins. Beachten Sie, daß Sie den Zeeman-Term zum Heisenberg-Hamiltonoperator hinzunehmen müssen.

- Stellen Sie $\frac{\mathcal{M}(T,B)}{g\mu_B}$ als Funktion von B für $T = 0$, $T = 1$ K und $T = 10$ K im Bereich von $B = 0, \dots, 50$ Tesla graphisch dar.