

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 Quantenmechanik, stat. TD	PD Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Felix Homann
---	--	---

Aufgabenblatt 3

3.1 Kanonisches Ensemble

Wiederholen Sie die in der Einführung behandelten Ensemble und zugehörigen Begriffe wie statistischer Operator und Zustandssumme.

Der statistische Operator \tilde{R} des kanonischen Ensembles lautet

$$\tilde{R} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \tilde{H}} \quad , \quad Z = \text{Sp} \left(e^{-\beta \tilde{H}} \right) . \quad (1)$$

Die Entropie war wie folgt definiert

$$S = -k \text{Sp} \left(\tilde{R} \ln(\tilde{R}) \right) . \quad (2)$$

- Wie ist die innere Energie U definiert?
- Zeigen Sie, daß

$$F = -kT \ln(Z) . \quad (3)$$

- Zeigen Sie, daß im großkanonischen Ensemble gilt

$$\phi = U - TS - \mu N = -kT \ln(Z_{\text{gk}}) . \quad (4)$$

3.2 Spin 1/2 im äußeren Magnetfeld

Ein Spin mit Spinquantenzahl $s = 1/2$ befinde sich in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} . Die Wechselwirkung zwischen Spin und Magnetfeld wird durch den Zeeman-Term beschrieben. Der Hamiltonoperator ist deshalb wie folgt definiert

$$\tilde{H} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{s} . \quad (5)$$

- Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Hamiltonoperators?
- Geben Sie die Spektraldarstellung des statistischen Operators des kanonischen Ensembles an.
- Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T, B)$ und die innere Energie $U(T, B)$.
- Berechnen Sie ebenfalls die Entropie $S(T, B)$ sowie die Magnetisierung $\mathcal{M}(T, B)$, die wie folgt definiert ist

$$\mathcal{M}(T, B) = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \text{Sp} \left(s_z \tilde{R} \right) . \quad (6)$$

3.3 Harmonischer Oszillator in kanonischen Ensemble

Wiederholen Sie den in der Einführung behandelten quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

Der Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators in einer Raumdimension lautet

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 = \hbar\omega \left(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \frac{1}{2} \right) . \quad (7)$$

- a. Welche Energieeigenwerte treten für diesen Hamiltonoperator auf?
- b. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T)$, die innere Energie $U(T)$ und die Wärmekapazität $C(T)$ im kanonischen Ensemble.
- c. Stellen Sie die innere Energie als Funktion von T graphisch dar. Zeichnen Sie zum Vergleich die innere Energie eines klassischen eindimensionalen harmonischen Oszillators ein.
- d. Wie lautet der Gleichverteilungssatz unter Vermeidung des Wortes Freiheitsgrad? Gilt er für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator?