

Universität Osnabrück Fachbereich Physik 04. Oktober 2004	Theoretische Physik 2 QM, stat. TD Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
---	--	-------------------------------

Name, Vorname, Matrikelnummer:

1 Wissen

1.1 Grundlegende Gleichungen, Relationen und Definitionen (45 P.)

- a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an (2 P.).
- b. Zur Zeit t_0 befinde sich das quantenmechanische System im Energieeigenzustand $|\phi_n\rangle$. In welchem Zustand befindet es sich zur Zeit $t > t_0$ (2 P.)?
- c. Das quantenmechanische System befinde sich im normierten Zustand $|\psi\rangle$. Wie ist der Erwartungswert der Observablen \tilde{A} definiert? Welche Werte können bei einer Messung von \tilde{A} auftreten und mit welchen Wahrscheinlichkeiten (3 P.)?
- d. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik (3 P.)?
- e. Wie groß sind innere Energie und Wärmekapazität eines klassischen idealen Gases aus N Teilchen in drei Raumdimensionen (2 P.)?
- f. Wie groß sind innere Energie und Wärmekapazität von N klassischen harmonischen Oszillatoren in drei Raumdimensionen (2 P.)?
- g. Wie lautet der erste Hauptsatz? Was ist ein perpetuum mobile 1. Art (5 P.)?
- h. Wie lautet der zweite Hauptsatz? Was ist ein perpetuum mobile 2. Art (5 P.)?
- i. Geben Sie die Formeln für die Energieeigenwerte für die folgenden Probleme an: Teilchen im eindimensionalen unendlich hohen Kastenpotential, Teilchen im eindimensionalen harmonischen Oszillator, Wasserstoffatom (9 P.).
- j. Es sollen zwei Spins s_1 und s_2 gekoppelt werden. Welche Werte kann der Gesamtspin annehmen (3 P.)?
- k. Es sollen drei Spins $s = 2$ gekoppelt werden. Welche Gesamtspins kann ich erreichen und wie oft treten diese auf (Entartung)? Prüfen Sie die Dimension des Hilbertraumes (4 P.).
- l. Zwei Spins $s = 1$ sollen gekoppelt werden. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Zustände mit Gesamtspin $S = 2$ (5 P.).

2 Können

2.1 Rate des magnetokalorischen Effekts (15 P.)

Die bei einer adiabatischen Magnetfeldänderung erreichbare Temperaturänderung kann durch die folgende Rate beschrieben werden

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_S . \quad (1)$$

- a. Zeigen Sie, daß folgende Relation gilt (8 P.)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_S = -T \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T}{C(T, B)} . \quad (2)$$

Dabei ist $C(T, B)$ die Wärmekapazität bei konstantem Magnetfeld

$$C(T, B) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_B . \quad (3)$$

Hinweis: Fassen Sie S als Funktion von T und B auf und stellen Sie das totale Differential auf. Weiterhin benötigen Sie den Zusammenhang zwischen C und S , den Sie erhalten, wenn Sie in der Definition (3) U durch F ausdrücken.

- b. Wie lautet die Rate für den klassischen Paramagneten? Gibt es eine kürzere Begründung als Formel (2) (7 P.)?

2.2 Zweiniveausystem (15 P.)

Der Hamiltonoperator eines Zweiniveausystems sei wie folgt definiert

$$\tilde{H} = |\phi_1\rangle E_1 \langle \phi_1| + |\phi_2\rangle E_2 \langle \phi_2| . \quad (4)$$

Dabei sei $E_1 < E_2$ und $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = 0$.

- Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Hamiltonoperators (1 P.)?
- Wie lauten der statistische Operator und die Zustandssumme des kanonischen Ensembles allgemein (2 P.)?
- Geben Sie die Spektraldarstellung des statistischen Operators des kanonischen Ensembles an (2 P.).
- Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T)$ und die innere Energie $U(T)$ (5 P.).
- Skizzieren Sie den Verlauf der inneren Energie als Funktion von T und geben Sie die Grenzwerte für $T \rightarrow 0$ sowie $T \rightarrow \infty$ an (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Wasserstoffatom approximativ mittels Ritz (20 P.)

Berechnen Sie die approximative Grundzustandsenergie sowie den approximativen Grundzustand für das Wasserstoffatom mit

$$\langle \vec{x} | \phi \rangle = \exp \left\{ -\frac{\vec{x}^2}{2\alpha} \right\} \quad (5)$$

als Testwellenfunktion. Der Hamiltonoperator lautet in Kugelkoordinaten

$$\tilde{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hbar^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} \left\{ \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

3.2 Fermionen im harmonischen Oszillator (15 P.)

Wir betrachten N identische (z. B. spinpolarisierte) Fermionen in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Das System soll im kanonischen Ensemble beschrieben werden. Die Zustandssumme lautet

$$Z_N^F(T, \omega) = \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_N} e^{-\beta \hbar \omega (n_1 + n_2 + \dots + n_N + \frac{N}{2})} = e^{-\beta \hbar \omega \frac{N^2}{2}} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - e^{-n\beta \hbar \omega}}. \quad (7)$$

- Zeigen Sie, daß die Grundzustandsenergie $E_0(N) = \hbar \omega \frac{N^2}{2}$ ist. Begründen Sie dies evtl. mit einer Skizze (5 P.)?
- Leiten Sie die innere Energie $U_N^F(T, \omega)$ her (10 P.).

3.3 Eindimensionaler anharmonischer Oszillator (20 P.)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators laute

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1 \quad (8)$$

$$\tilde{H}_0 = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \tilde{x}^2 \quad (9)$$

$$\tilde{H}_1 = \beta \tilde{x}^4. \quad (10)$$

Welche Energiekorrekturen ergeben sich in erster Ordnung Störungstheorie (20 P.)?

Hinweis: In der algebraischen Lösung zum harmonischen Oszillator werden Erzeuger \tilde{a}^\dagger und Vernichter \tilde{a} einführt, die auf die ungestörten Energieeigenzustände wie folgt wirken

$$\tilde{a}^\dagger |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)^{(0)}\rangle, \quad \tilde{a} |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)^{(0)}\rangle. \quad (11)$$

Der Ortsoperator läßt sich durch \tilde{a}^\dagger und \tilde{a} ausdrücken: $\tilde{x} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger)$. Damit können dann die Energiekorrekturen berechnet werden.

Es können 130 Punkte erreicht werden.

Bewertung nach ECTS

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow F$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow E$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow D$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow C$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow B$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow A$

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!