

Universität Osnabrück Fachbereich Physik 08. Juli 2004	Theoretische Physik 2 QM, stat. TD Klausur	apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
--	--	-------------------------------

**Name, Vorname, Matrikelnummer:**

## 1 Wissen

### 1.1 Grundlegende Gleichungen, Relationen und Definitionen (45 P.)

- a. Geben Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung an (2 P.).
- b. Zur Zeit  $t_0$  befinde sich das quantenmechanische System im Energieeigenzustand  $|\phi_n\rangle$ . In welchem Zustand befindet es sich zur Zeit  $t > t_0$  (2 P.)?
- c. Das quantenmechanische System befinde sich im normierten Zustand  $|\psi\rangle$ . Wie ist der Erwartungswert der Observablen  $\tilde{A}$  definiert? Welche Werte können bei einer Messung von  $\tilde{A}$  auftreten und mit welchen Wahrscheinlichkeiten (3 P.)?
- d. Wie lautet der statistische Operator des kanonischen Ensembles (1 P.)?
- e. Wie lautet der Gleichverteilungssatz (3 P.)?
- f. Wie groß sind innere Energie und Wärmekapazität eines idealen Gases aus  $N$  Teilchen in drei Raumdimensionen (2 P.)?
- g. Wie groß sind innere Energie und Wärmekapazität von  $N$  harmonischen Oszillatoren in drei Raumdimensionen (2 P.)?
- h. Wie lautet der erste Hauptsatz? Was ist ein perpetuum mobile 1. Art (5 P.)?
- i. Wie lautet der zweite Hauptsatz? Was ist ein perpetuum mobile 2. Art (5 P.)?
- j. Geben Sie die Formeln für die Energieeigenwerte für die folgenden Probleme an: Teilchen im eindimensionalen unendlich hohen Kastenpotential, Teilchen im eindimensionalen harmonischen Oszillator, Wasserstoffatom (12 P.).
- k. In Besetzungszahldarstellung laute ein Zustand für 2 spinpolarisierte Fermionen (Spin rauf) im eindimensionalen harmonischen Oszillator  $|0, 1, 1, 0, \dots\rangle$ . Skizzieren Sie die Niveaus des Oszillators und zeichnen Sie die beiden Fermionen ein. Wie lautet der Zweiteilchenzustand, wenn die Oszillatoreigenzustände mit  $|\phi_n\rangle$  bezeichnet werden (8 P.)?

## 2 Können

### 2.1 Kanonisches Ensemble (10 P.)

- Wie lautet der statistische Operator  $\tilde{R}$  des kanonischen Ensembles und wie lautet die Zustandssumme  $Z$  (1 P.)?
- Wie ist die innere Energie  $U$  definiert (2 P.)?
- Die Entropie war wie folgt definiert

$$S = -k \operatorname{Sp} \left( \tilde{R} \ln(\tilde{R}) \right) . \quad (1)$$

Wie hängen die innere Energie  $U$  und die freie Energie  $F$  zusammen? Zeigen Sie, daß (7 P.)

$$F = -kT \ln(Z) . \quad (2)$$

### 2.2 Spin 1/2 im äußeren Magnetfeld (15 P.)

Ein Spin mit Spinquantenzahl  $s = 1/2$  befinde sich in einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$ . Die Wechselwirkung zwischen Spin und Magnetfeld wird durch den Zeeman-Term beschrieben. Der Hamiltonoperator ist deshalb wie folgt definiert

$$\tilde{H} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{s} . \quad (3)$$

- Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Hamiltonoperators (3 P.)?
- Geben Sie die Spektraldarstellung des statistischen Operators des kanonischen Ensembles an (2 P.).
- Berechnen Sie die Zustandssumme  $Z(T, B)$  und die innere Energie  $U(T, B)$  (5 P.).
- Skizzieren Sie den Verlauf der inneren Energie als Funktion von  $T$  bei festem  $B \neq 0$  und geben Sie die Grenzwerte für  $T \rightarrow 0$  sowie  $T \rightarrow \infty$  an (5 P.).

### 2.3 Ritzsches Variationsverfahren (15 P.)

$|\phi\rangle$  sei ein normierbarer Zustand und  $\tilde{H}$  ein Hamiltonoperator, dessen kleinster Eigenwert  $E_0$  laute. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\langle \phi | \tilde{H} | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \geq E_0 \quad (4)$$

für beliebige normierbare Zustände  $|\phi\rangle$  des Hilbertraumes gilt (15 P.).

### 3 Weiterdenken

#### 3.1 Dreidimensionales Fermigas (25 P.)

Betrachten Sie das dreidimensionale Fermigas aus Fermionen mit einem Spin  $s = 1/2$ . Die Einheitszelle des Systems habe die Abmessungen  $L \times L \times L$ , die Eigenzustände sollen periodische Randbedingungen am Rand der Zelle erfüllen.

- Geben Sie den Hamiltonoperator des Systems sowie seine Eigenwerte und Eigenvektoren an (7 P.).
- Wie waren die Fermienergie und der Fermiimpuls definiert (3 P.)?
- In der Kontinuumsnäherung führt man die folgenden Ersetzungen durch

$$\sum_{n_x, n_y, n_z; m_s} \cdot = (2s + 1) \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3k \cdot = \int d\varepsilon g(\varepsilon) \cdot \quad (5)$$

Leiten Sie die Einteilchenzustandsdichte  $g(\varepsilon)$  her (7 P.).

- Berechnen Sie  $\varepsilon_F$  als Funktion der Dichte  $\rho = N/L^3$  (8 P.).

#### 3.2 Eindimensionaler anharmonischer Oszillator (20 P.)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators laute

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_1 \quad (6)$$

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \underline{x}^2 \quad (7)$$

$$\underline{H}_1 = \beta \underline{x}^4 \quad (8)$$

Welche Energiekorrekturen ergeben sich in erster Ordnung Störungstheorie (20 P.)?

**Hinweis:** In der algebraischen Lösung zum harmonischen Oszillator werden Erzeuger  $\underline{a}^\dagger$  und Vernichter  $\underline{a}$  eingeführt, die auf die ungestörten Energieeigenzustände wie folgt wirken

$$\underline{a}^\dagger |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)^{(0)}\rangle \quad , \quad \underline{a} |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)^{(0)}\rangle \quad (9)$$

Der Ortsoperator läßt sich durch  $\underline{a}^\dagger$  und  $\underline{a}$  ausdrücken:  $\underline{x} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(\underline{a} + \underline{a}^\dagger)$ . Damit können dann die Energiekorrekturen berechnet werden.

**Es können 130 Punkte erreicht werden.**

## **Bewertung nach ECTS**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow F$
- $51 \leq P \leq 60 \Rightarrow E$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow D$
- $71 \leq P \leq 80 \Rightarrow C$
- $81 \leq P \leq 90 \Rightarrow B$
- $91 \leq P \leq \infty \Rightarrow A$

## **Noten**

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

**Viel Erfolg!**