

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Numerische Physik WS 2004/2005	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uos.de
---	-----------------------------------	--

Aufgabenblatt 8

8.1 Ziegenproblem

In einer Spielshow ist hinter einer von drei Türen ein Ferrari versteckt, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Der Kandidat wählt eine der Türen aus. Daraufhin sagt der Moderator, daß er ihm gern helfen wolle, öffnet eine Tür, hinter der eine Ziege steht und fragt dann den Kandidaten, ob er sich seine Entscheidung noch einmal überlegen wolle. Viele Menschen, auch angesehene Mathematiker, können nicht glauben, daß es sich lohnt, sich für die andere Tür zu entscheiden.

Zeigen Sie mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation, in der Sie die Show nachspielen, wie oft der Kandidat gewonnen hätte, wenn er sich nicht umentscheidet und wie oft er gewonnen hätte, wenn er sich umentscheidet.

8.2 Zweidimensionales Ising-Modell

Berechnen Sie mit Hilfe des Metropolis-Algorithmus für ein 10×10 -Ising-Spinnitter die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur.

Der Hamiltonoperator des Ising-Modells ist durch

$$\tilde{H} = -2 \sum_{i,j} J_{ij} \tilde{s}_z(i) \tilde{s}_z(j) \quad (1)$$

gegeben, wobei $J_{ij} = J > 0$ für die nächsten Nachbarn auf dem Gitter (links, rechts, oben, unten). Der positive Wert bedeutet ferromagnetische Kopplung. Die verwendete Spinquantenzahl ist $s = 1/2$. Dann gibt es an jedem Punkt nur zwei Einstellmöglichkeiten, so daß man das Ising-Modell oft auch wie folgt hinschreibt

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j . \quad (2)$$

Dabei können die $\sigma_k = \pm 1$ sein.

Die Magnetisierung wird dann als

$$\mathcal{M} = -g\mu_B \sum_i \tilde{s}_z(i) \quad (3)$$

definiert, allerdings braucht man zum Verständnis des Modells die Konstanten nicht und berechnet stattdessen

$$\mathcal{M} = \frac{1}{N} \left| \sum_i \sigma_i \right| . \quad (4)$$

Dabei ist N die Zahl der Spins. Der Betrag wird gewählt, weil eine ferromagnetische Ordnung in die eine Richtung und ebensogut in die entgegengesetzte zeigen kann, d.h. eine saubere Definition dessen, was man eigentlich beschreiben will, wäre über Spin-Spin-Korrelationsfunktionen gegeben.

- a. Entscheiden Sie sich für ein numerisches Hilfsmittel: mathematica, matlab, C oder FORTRAN.
- b. Definieren Sie das Spinsystem als 10×10 -Matrix.
- c. Sie können die Wechselwirkung auch als Matrix definieren oder dies explizit in die folgenden Berechnungen einbauen.
- d. Berechnen Sie die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur für $T/J = 0.5 \dots 10.0$ in Schritten von 0.5. Nutzen Sie etwa 100 Sweeps, bei denen Sie jeweils alle Spins durchgehen, d.h. Ihre Mittelung erfolgt über $100N = 10000$ Metropolis-Schritte.
- e. Stellen Sie die Magnetisierung als Funktion der Temperatur dar. Wenn alles gutgegangen ist, können Sie den Phasenübergang ahnen.

Literatur: Sie können sich zu dieser Aufgabe ausgezeichnet in der Bachelor-Arbeit von Stefan Torbrügge informieren:

<http://www.physik.uni-osnabrueck.de/makrosysteme/examen.htm>