Universität Osnabrück	Numerische Physik	Apl. Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fachbereich Physik	WS 2004/2005	jschnack@uos.de

Aufgabenblatt 3

3.1 Integration der Planckschen Strahlungsformel

Die spektrale Energiedichte des Photonengases lautet

$$u(T,\omega) \;=\; \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}\ . \tag{1}$$

Aus ihr berechnet sich die innere Energie $U(T)$ eines Photonengases im Volumen V bei der Temperatur T wie folgt

$$U(T) \;=\; V\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\; u(T,\omega) = V\,\frac{\pi^2}{15}\left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3 k_B T\left[\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{15}{\pi^4}\frac{x^3}{\exp(x)-1}\right]\ . \tag{2}$$

In der letzten Darstellung ist $x=\hbar\omega/(k_B T)$. Der Integrand

$$S(x) \;=\; \frac{15}{\pi^4}\frac{x^3}{\exp(x)-1} \tag{3}$$

kann als Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der Frequenzen angesehen werden, d.h. als Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das Photonengas bei einer vorgegebenen Temperatur T bei der Frequenz ω vorzufinden.

a. Stellen Sie die Funktion mit Mathematica dar und integrieren Sie sie sowohl analytisch als auch numerisch. Wenn $S(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte in x ist, welche Norm muß die Funktion haben? Überprüfen Sie dies.

b. Programmieren Sie die wiederholte Simpson-Regel aus dem Skript von U. Wolff (S. 86) mit matlab und integrieren Sie damit die Formel (3). Stellen Sie die Konvergenz als Funktion der Intervallunterteilung dar.

c. Informieren Sie sich über die matlab-Funktionen `quad` und `quadl` und integrieren Sie die Formel (3) mit diesen Funktionen.

d. Finden Sie das Maximum von $S(x)$. Mit Mathematica ist das ganz einfach (ausprobieren!), aber wie könnte man es mit matlab herausbekommen?