| | | |
|---|---|---|
| Universität Osnabrück<br>Fachbereich Physik | Theoretische Physik 2<br>Quantenmechanik, stat. TD | Dr. Jürgen Schnack<br>Dr. Maxim Gorkunov |

# Aufgabenblatt 9

## 9.1 Gaußsches Wellenpaket

Gaußsche Wellenpakete spielen für das Verständnis der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie werden außerdem in der Quantenoptik sowie in Näherungsverfahren verwendet.
Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle\, x \,|\, \phi \,\rangle \;=\; c \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2a} + i\frac{x p_0}{\hbar} \right\} \; . \tag{1}$$

$a$, $x_0$ und $p_0$ sind dabei reell.

a. Bestimmen Sie die Normierungskonstante $c$.

b. Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls.

c. Wie lautet die Impulsdarstellung des Gaußschen Wellenpakets?

d. Überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation.

e. Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für die freie Bewegung ($\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T}$) und geben Sie die Wellenfunktion für spätere Zeiten an.

f. Was erhalten Sie für $\langle\, \phi(t) \,|\, \underset{\sim}{x} \,|\, \phi(t) \,\rangle$?

## 9.2 Eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung

a. Ein eindimensionaler Rechteckpotentialtopf der Tiefe $U$ habe eine Breite von 1 Å. Innerhalb welcher Schranken für $U$ (in eV) existieren genau zwei gebundene Zustände für Elektronen?

b. Für den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators berechne man formelmäßig die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich.

## 9.3 Zusatzaufgabe: Zeitentwicklung im Kastenpotential

Die Zeitentwicklung eines Systems, d.h. des Zustandes $|\,\Psi\,\rangle$ wird durch die zeitabhängige Schrödingergleichung beschrieben

$$i\hbar\frac{d}{dt}\;|\,\Psi(t)\,\rangle \;=\; \underset{\sim}{H}\,|\,\Psi(t)\,\rangle\;. \tag{2}$$

Dabei ist $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{V}$ der Hamiltonoperator, der sich als Summe aus den Operatoren der kinetischen und der potentiellen Energie ergibt.
Wir betrachten im folgenden das physikalische Problem eines Teilchens, das zwischen zwei ideal reflektierenden Wänden eingesperrt ist. Man sagt, das Teilchen befindet sich in einem unendlich hohen Kastenpotential. Zwischen den Wänden im Intervall $[0, L]$ kann sich das Teilchen frei bewegen. Man beschreibt das System, indem man nur die Bewegung im Kasten mit $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T}$ betrachtet und den Einfluß der unendlich hohen Potentialwände durch die Randbedingung $\langle\,0\,|\,\Psi(t)\,\rangle = \langle\,L\,|\,\Psi(t)\,\rangle = 0$ modelliert.
Beschreiben Sie die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\,\Psi\,\rangle$. Bestimmen Sie dazu zuerst die Eigenzustände und Eigenwerte des Hamiltonoperators

$$\underset{\sim}{H}\,|\,\phi_n\,\rangle \;=\; \underset{\sim}{T}\,|\,\phi_n\,\rangle = \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m}\,|\,\phi_n\,\rangle = E_n\,|\,\phi_n\,\rangle\;. \tag{3}$$

Die Eigenzustände $|\,\phi_n\,\rangle$ bilden eine Basis. Entwickeln Sie den Zustand $|\,\Psi\,\rangle$ bezüglich dieser Basis. Setzen Sie diese Darstellung in Gleichung (2) ein und integrieren Sie bezüglich der Zeit. Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\,\Psi(t)\,\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\,\Psi(0)\,\rangle$ befunden hat?
Nehmen Sie an, dass das System zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$\langle\,x\,|\,\Psi(0)\,\rangle \;=\; \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3\,L}}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L\;. \end{cases} \tag{4}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die ersten 20 Komponenten von $|\,\Psi(0)\,\rangle$ bezüglich der Basis $\{\,|\,\phi_n\,\rangle\}$ mit Mathematica und stellen Sie die Zeitentwicklung des Realteils, des Imaginärteils und des Betrags dar.