

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 Quantenmechanik, stat. TD	Dr. Jürgen Schnack Dr. Maxim Gorkunov
---	--	--

Aufgabenblatt 7

7.1 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus dem System von Potenzen $\{x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ läßt sich in $C^0([a, b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b dx f^*(x) g(x) \quad (1)$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$. Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $|g_n\rangle, n = 0, 1, 2, 3$.

7.2 Funktionen auf $[a, b]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle x | u_n \rangle = u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\frac{n\pi}{L} x \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

- Skizzieren Sie die ersten drei Funktionen u_1, u_2, u_3 .
- Überprüfen Sie, ob die Funktionen $|u_n\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden.
- Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2(L-x) & \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3)$$

durch die ersten N Funktionen $|u_n\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $n = 1, n = 5$ und $n = 10$.

- Es liegt nahe, zu vermuten, daß die Funktionen $|u_n\rangle$ eine Basis im Vektorraum $C^0([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

7.3 Orts- und Impulsoperatoren

Man betrachte die beliebig oft differenzierbaren Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Sind die Operatoren \tilde{x} und \tilde{p} hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle f | \tilde{x} | g \rangle := \int_0^L dx f^*(x) x g(x) \quad (4)$$

und

$$\langle f | \tilde{p} | g \rangle := \int_0^L dx f^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} g(x) . \quad (5)$$