Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Theoretische Physik 2 Quantenmechanik, stat. TD	Dr. Jürgen Schnack Dr. Maxim Gorkunov

Aufgabenblatt 3

3.1 Hermitesche Operatoren

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an.

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind.

Geben Sie einen physikalischen Grund an, warum die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sein sollten.

3.2 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{\,|\,s_z\,+\rangle,\ |\,s_z\,-\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert.

a. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_x$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Wie lauten die Eigenwerte? Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar.

c. Stellen Sie die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_z$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_x$ (1) dar.

d. Die Vertauschungsrelationen für Drehimpulse lautet

$$\left[\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y\right] = i\,\hbar\,\underset{\sim}{s}_z \ . \tag{2}$$

In diesem Ausdruck können die Indizes zyklisch vertauscht werden, d.h. $x \to y \to z \to x$. Da Sie die Darstellungen von $\underset{\sim}{s}_z$ und $\underset{\sim}{s}_x$ kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu $\underset{\sim}{s}_z$) die Darstellung von $\underset{\sim}{s}_y$ berechnen. Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_y$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ auf.

3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Diese Matrix kann numerisch diagonalisiert werden. Allerdings kann man an der Struktur der Matrix erkennen, dass sich die Diagonalisierung vereinfachen läßt. Können Sie sich vorstellen wie? Begründen Sie Ihre Idee.