

Universität Osnabrück Fachbereich Physik	Numerische Physik WS 2003/2004	PD Dr. Jürgen Schnack Dipl.-Phys. Matthias Exler
---	-----------------------------------	---

Aufgabenblatt 4

4.1 Integration der Planckschen Strahlungsformel

Die spektrale Energiedichte des Photonengases lautet

$$u(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (1)$$

Aus ihr berechnet sich die innere Energie $U(T)$ eines Photonengases im Volumen V bei der Temperatur T wie folgt

$$U(T) = V \int_0^\infty d\omega u(T, \omega) = V \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{k_B T}{c \hbar}\right)^3 k_B T \left[\int_0^\infty dx \frac{15}{\pi^4} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \right]. \quad (2)$$

In der letzten Darstellung ist $x = \hbar \omega / (k_B T)$. Der Integrand

$$S(x) = \frac{15}{\pi^4} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \quad (3)$$

kann als Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der Frequenzen angesehen werden, d.h. als Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das Photonengas bei einer vorgegebenen Temperatur T bei der Frequenz ω vorzufinden.

- Stellen Sie die Funktion mit Mathematica dar und integrieren Sie sie sowohl analytisch als auch numerisch. Wenn $S(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte in x ist, welche Norm muß die Funktion haben? Überprüfen Sie dies.
- Programmieren Sie die wiederholte Simpson-Regel aus dem Skript von U. Wolff (S. 86) mit matlab und integrieren Sie damit die Formel (3). Stellen Sie die Konvergenz als Funktion der Intervallunterteilung dar.
- Informieren Sie sich über die matlab-Funktionen `quad` und `quadl` und integrieren Sie die Formel (3) mit diesen Funktionen.
- Finden Sie das Maximum von $S(x)$. Mit Mathematica ist das ganz einfach (ausprobieren!), aber wie könnte man es mit matlab herausbekommen?