Universität Osnabrück	Mathematische Methoden 1	PD Dr. Jürgen Schnack
Fachbereich Physik	WS 2003/2004	Dr. Roberts Eglitis

Aufgabenblatt 10

10.1 Gaußscher Satz

Ein Heißluftballonfahrer benutzt einen Ballon in Form einer großen Milchkuh mit einem Volumen von $V_{\text{Ballon}} = 5000\text{m}^3$. Er schwebt in der neutral geschichteten Troposhäre. Neutrale Schichtung bedeutet, daß die Dichte ρ und die Temperatur T wie folgt von der Höhe z über dem Erdboden abhängen:

$$T(z) = T_0\,(1 - z/L) \tag{1}$$

$$\rho(z) = \rho_0(1 - z/L)^{2.5}\ ,\ \text{mit}\quad \rho_0 = \frac{m\,p_0}{k_B T_0} \tag{2}$$

und $L = 29.83$ km. Dabei ist $k_B \approx 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante und $m = 28.84/(6.023 \cdot 10^{26})$kg die mittlere Masse eines Luftmoleküls. Ballonhülle und Fracht haben zusammen die Masse $M_{\text{Last}} = 500$ kg. Es sei $p_0 = 1000$ Hektopascal und $T_0 = 290$ K. In welcher Höhe z_0 schwebt der Ballon, wenn die Ballontemperatur auf 10% über der Umgebungstemperatur gehalten wird?
Anleitung: z_0 werde als mittlere z-Koordinate des Ballons gemäß

$$\rho(z_0) =: \frac{1}{V_{\text{Ballon}}} \int_{\text{Ballon}} \mathrm{d}V_{\vec{r}}\ \rho(z) \tag{3}$$

definiert. Auf ein nach außen gerichtetes Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$ der Ballonhülle wirkt die Kraft $-p(z)\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$, die durch den Luftdruck $p = p(z)$ verursacht wird. Die resultierende Gesamtkraft (Auftrieb) kann man durch z_0 ausdrücken, wenn man den Gaußschen Satz (für skalare Felder) und die hydrostatische Grundgleichung

$$\frac{\partial\,p}{\partial\,z} = -\rho\,g \tag{4}$$

mit $g = const$ benutzt. Diese Auftriebskraft muß gerade das Gesamtgewicht von Ballonhülle, Gasinhalt und Fracht – also

$$-g\left(M_{\text{Last}} + \int \mathrm{d}V_{\vec{r}}\ \rho_{\text{Ballon}}\right)\cdot\vec{e}_z \tag{5}$$

kompensieren. Man kann die ideale Gasgleichung

$$\rho_{\text{Ballon}} = \frac{mp(z)}{k_B T_{\text{Ballon}}} = \rho(z)\frac{T(z)}{T_{\text{Ballon}}} \tag{6}$$

verwenden. Mit (2) hat man dann die Bestimmungsgleichung für z_0.