| Universität Osnabrück | Mathematische Methoden 1 | PD Dr. Jürgen Schnack |
| --- | --- | --- |
| Fachbereich Physik | WS 2003/2004 | Dr. Roberts Eglitis |

# Aufgabenblatt 9

## 9.1 Funktionaldeterminate (50)

a. Stellen Sie die Funktionaldeterminante für den Übergang von kartesischen Koordinaten $x, y$ zu ebenen Polarkoordinaten $\rho, \phi$ auf.

b. Gegeben sei die Oberfläche einer Kugel mit dem festen Radus $R$. Stellen Sie die Funktionaldeterminate für den Übergang von kartesischen Koordinaten $x, y$ zu Kugelkoordinaten $\theta, \phi$ auf.

c. Zeigen Sie, daß die Funktionaldeterminate die folgenden Eigenschaften hat

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} = \frac{\partial\,(y,x)}{\partial\,(v,u)} = -\frac{\partial\,(y,x)}{\partial\,(u,v)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\,(x,z)}{\partial\,(u,z)} = \left.\frac{\partial\,x}{\partial\,u}\right|_{z=\text{const}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} = \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(s,t)}\,\frac{\partial\,(s,t)}{\partial\,(u,v)} \ . \tag{3}$$

Diese Eigenschaften werden zum Beispiel in der Thermodynamik ausgenutzt.

## 9.2 Kugeloberfläche (20)

a. Stellen Sie die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R$ durch eine Funktion $\Psi(x, y, z) = 0$ dar.

b. Ermitteln Sie den Normalenvektor durch Gradientenbildung in kartesischen Koordinaten.

c. Stellen Sie die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R$ mit Hilfe zweier Parameter $\theta, \phi$ dar, d.h. $\vec{r} = \vec{r}(\theta, \phi)$.

d. Ermitteln Sie das Flächenelement

$$\mathrm{d}\vec{f} = \frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\,\theta} \times \frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\,\phi}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \ . \tag{4}$$

## 9.3 Wendelrampe (30)

Eine Wendelrampe mit dem Radius $R$ und der Ganghöhe $a$ sei durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(\rho, \phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, a\phi/(2\pi)) \tag{5}$$

gegeben. Dabei ist $\rho \in [0, R]$ und $\phi \geq 0$.
Berechnen Sie die Fläche für einen Umlauf, d.h. $\phi \in [0, 2\pi]$.