

Mathematik in der Physik

Jürgen Schnack

Fakultät für Physik – Universität Bielefeld

<http://obelix.physik.uni-bielefeld.de/~schnack/>

WMINT – Mathematik-Brückenkurs

08.02.2022

Die Physik ist in der Sprache
der Mathematik formuliert.



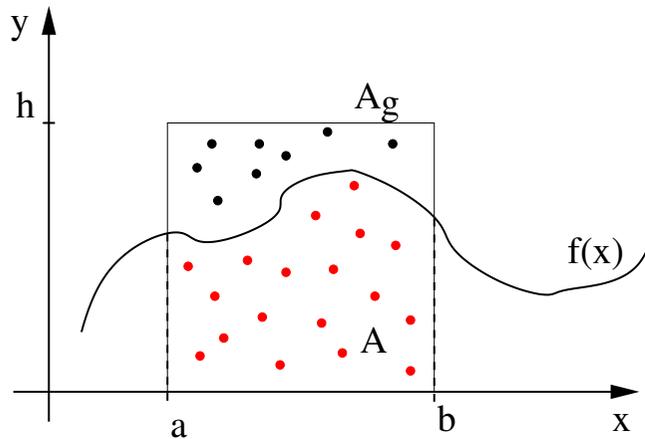
David Hilbert

Die Physik ist
für die
Physiker
eigentlich viel
zu schwer.

Aber wir wissen uns zu helfen!

Beispiel 1: Wie integriert man,
wenn's eigentlich nicht geht?

Wie integriert man, wenn's eigentlich nicht geht?

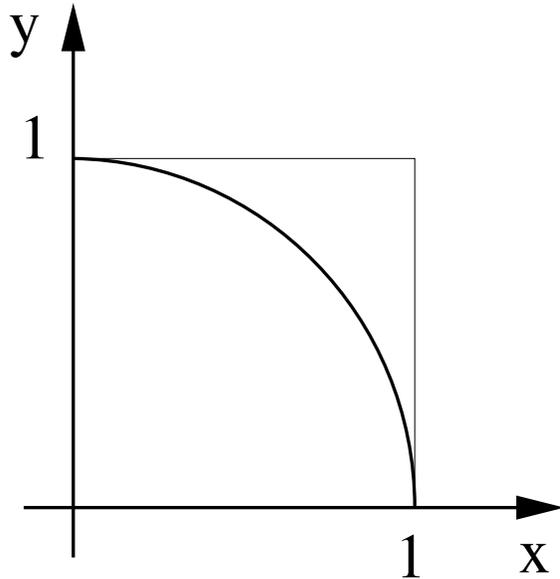


- Durch Auszählen (Archimedes) – zu langsam!
- **Durch Auswürfeln (Monte Carlo) – prima!**
- Würfel = Computerprogramm

Wir schreiben ein Computerprogramm, das zufällig N_g Punkte in das Rechteck der Fläche A_g wirft. Davon landen N in der Fläche, die wir berechnen wollen. Dann gilt

$$A \approx \frac{N}{N_g} A_g .$$

Kann man π auswürfeln?



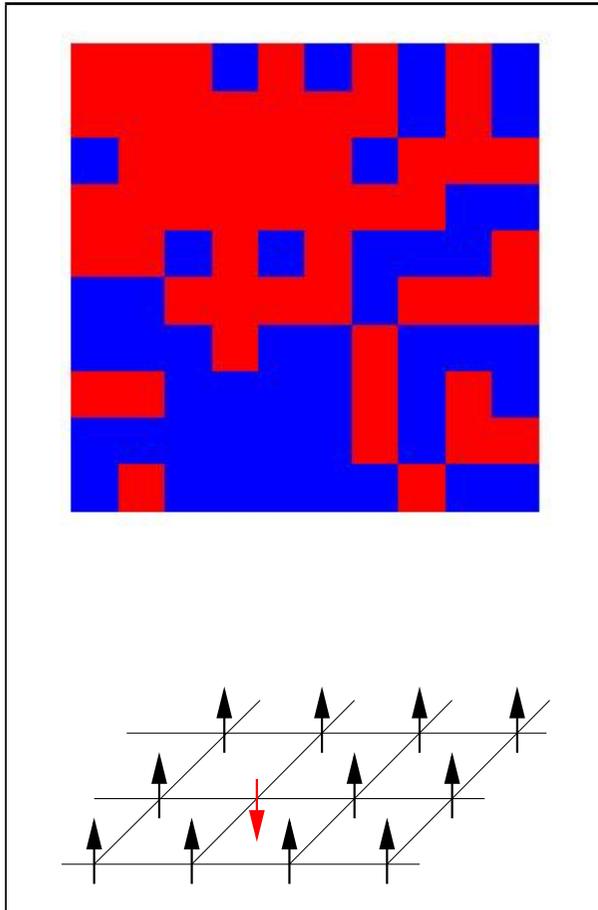
- Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ beschreibt Viertelkreis im 1. Quadranten.
- Fläche $A = \pi r^2/4$ mit $r = 1$.
- Würfel zufällige Punkte in das Quadrat, das den Viertelkreis umschreibt.

Wieder sei N die Anzahl der Punkte, die in der gesuchten Fläche A landen. Die Gesamtzahl sei N_g . Die Fläche des Quadrats ist $A_g = 1$. Dann erhalten wir

$$\pi \approx 4 \frac{N}{N_g} .$$

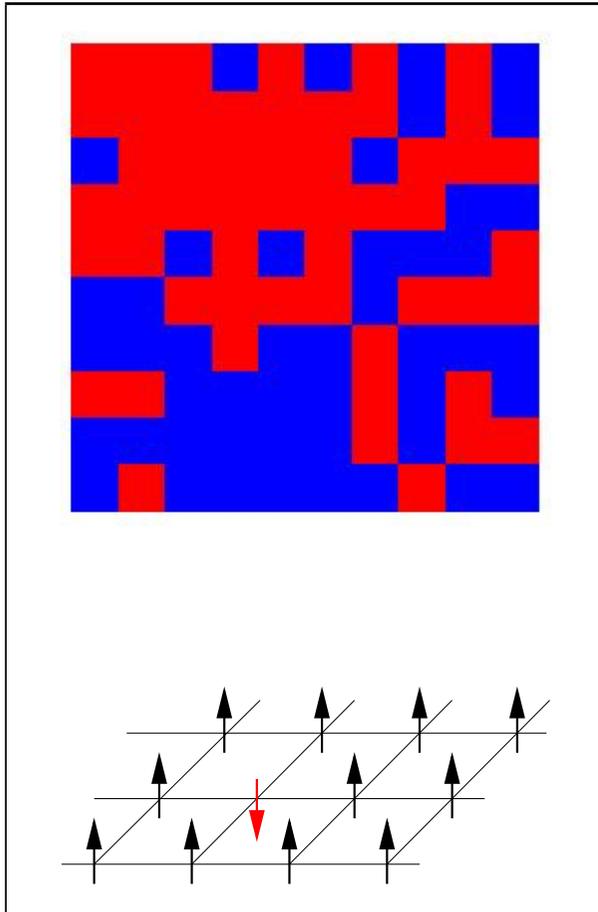
Beispiel 2: Wenn wir schon mal
dabei sind: Große Summen
kann man auch auswürfeln!

Ising-Modell und Metropolis-Algorithmus



- Ising-Modell: Einfaches Modell des Ferromagnetismus.
- In einem Magneten können die „Magnetnadeln“ nur nach oben oder nach unten zeigen.
- Die Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn bevorzugt Gleichrichtung.

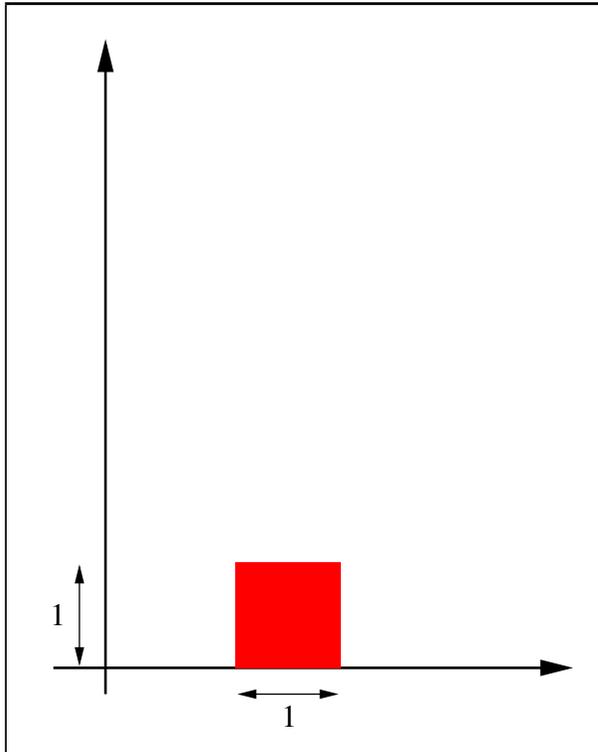
Ising-Modell und Metropolis-Algorithmus



- Wir brauchen $\sum_{\text{alle Konfigurationen } k} e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$.
- Wie viele Konfigurationen sind das bei einem zwei-dimensionalen Ising-Modell mit 10×10 Spins?
- Schaffen wir das? Mit einem PC, der mit GHz läuft?
- \Rightarrow **Würfeln ist besser!**

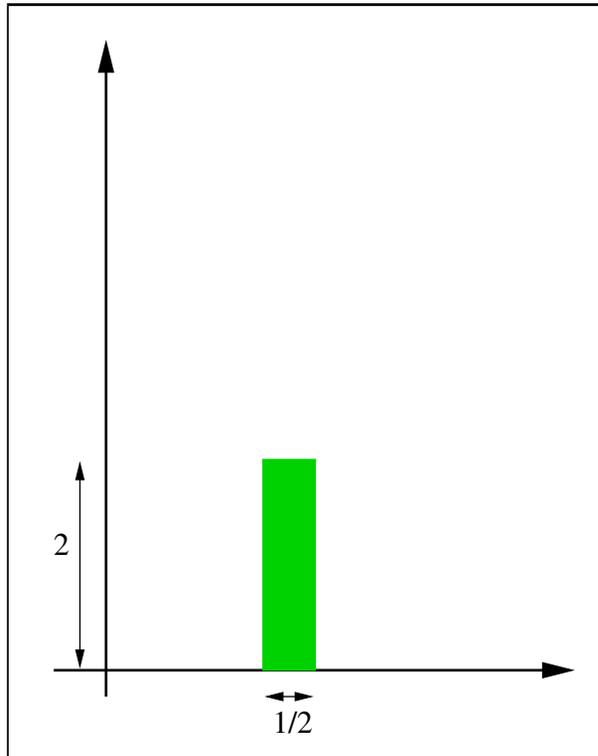
Beispiel 3 zum Thema ∞ :
Geht „unendlich klein“,
aber nicht Null?

Die δ -Funktion



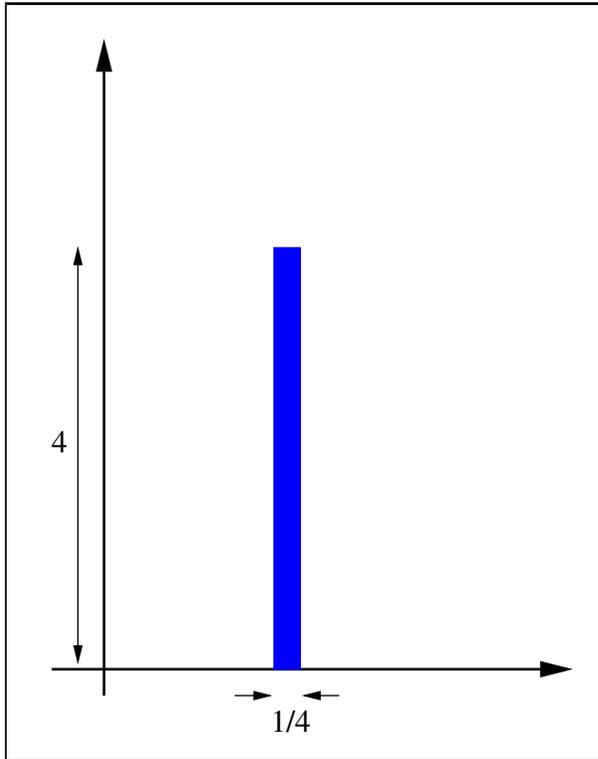
Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



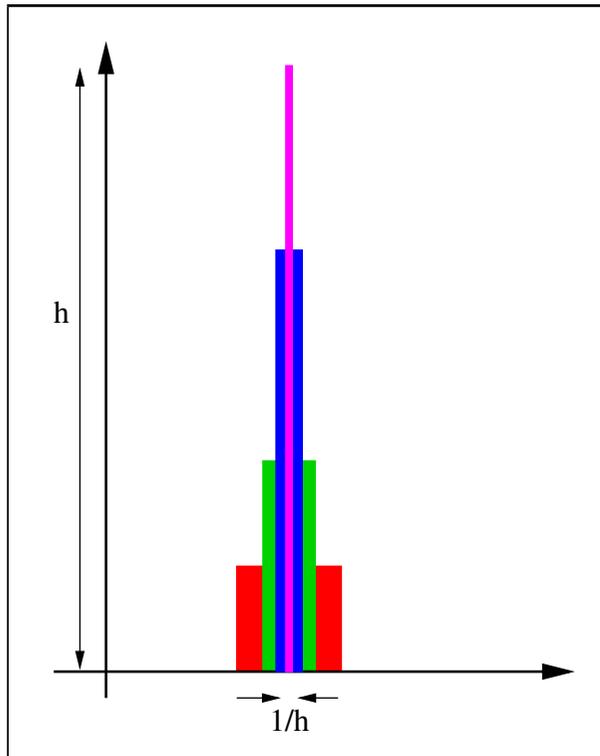
Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



Wenn man jetzt immer so weiter macht:

Gegen welchen Wert geht die Breite?

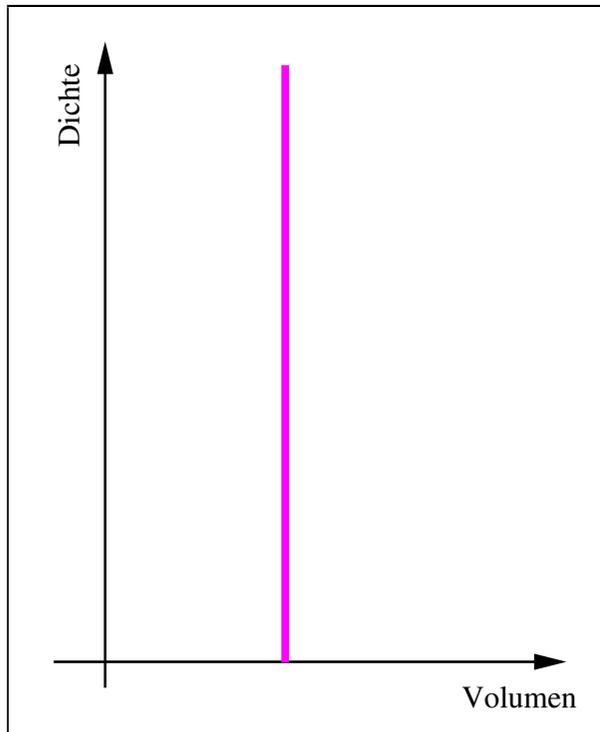
Gegen welchen Wert geht die Höhe?

Gegen welchen Wert geht die Fläche?

Ein typischer Fall von

$$0 \cdot \infty$$

Die δ -Funktion



Die δ -Funktion wurde von dem Physiker Paul Dirac erfunden.^(*)

Die δ -Funktion ist genau genommen gar keine Funktion, sondern eine sogenannte Distribution, aber wir Physiker rechnen damit, als wäre es eine Funktion.

Mit der δ -Funktion kann man zum Beispiel die Dichte eines Teilchens beschreiben, das keine Ausdehnung hat (Punktteilchen).

Volumen mal **Dichte** = Masse.

$$\int d^3x m \delta^{(3)}(\vec{x}) = m$$

^(*) Physiker sind einfach wunderbar!

Das Elektron

Das Elektron ist unendlich klein,
oder?

Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind unendlich klein, oder?

Sie können es herausfinden!

Denn Sie mögen Mathematik!

Damit können Sie vieles
studieren,
z.B.

Physik!



Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit